Montréal, le 08 mars 2026

Géométrie riemannienne : Devoir I

Répondre aux questions 1 à 4 et donner les justifications nécessaires. A remettre le travaille en écrit au plus tard le 30 avril 2026.

(1) Une métrique lorentzienne ℓ sur une variété lisse M est une section lisse de $T*M \otimes T^*M$, telle que pour tout point $p \in M$, $\ell(p)$ est une forme bilinéaire symétrique du tangent T_pM de signature $(1, n-1)$.
(a) Démontrez que la sphère S^2 n'admet aucune métrique lorentzienne lisse.

(b) Démontrez que la sphère S^3 admet une infinité de métriques lorentziennes lisses.

(c) Trouvez une condition topologique sur une variété lisse compacte qui est suffisante pour l'exsitance d'une métrique lorentzienne lisse.

(2) Déterminer le groupe d'isométries riemanniennes et le volume riemannien de l'espace projectif réel $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ muni de sa métrique *quotient* standard, provénant de l'identification

$$\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \cong (\mathbb{S}^n, g_{\mathbb{S}^n})/\text{antipod},$$

où antipod est la restriction à $\mathbb{S}^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ de l'application

$$-\text{Id} : \ \mathbf{R}^{n+1} \to \ \mathbf{R}^{n+1}.$$

(3) Rappelons que deux métriques riemanniennes, g_1 et g_2, sur une variété lisse M sont dites *homothétiques* s'il existe une constante $\lambda > 0$ telle que $g_1 = \lambda g_2$. Le but de cet exercice est de classifier les tores plats de dimension 2, à une isométrie et une homothétie près.
(a) Soient $a = (a_1, a_2)$ et $b = (b_1, b_2)$ deux bases de $\mathbf{R}^2$ et $\Gamma_a = \mathbf{Z}a_1 \oplus \mathbf{Z}a_2$, $\Gamma_b = \mathbf{Z}b_1 \oplus \mathbf{Z}b_2$ les réseaux engendrés. Motrer que les tores plats $(T_a, g_a) := (\mathbf{R}^2, g_{st})/\Gamma_a$ et $(T_b, g_b) = (\mathbf{R}^2, g_{st})/\Gamma_b$ sont équivalents, à une isométrie et une homothétie près, si et seulement s'il existe une isométrie de l'espace euclidien $(\mathbf{R}^2, g_{st})$, A, et une constante réelle positive λ, telles que $(\lambda A)(\Gamma_a) = \Gamma_b$.
(b) En utilisant (a), démontrer que l'ensemble des tores plats modulo isométries et homothéties est en bijection avec l'ensemble

$$\mathcal{M} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1, 0 \leq x \leq 1/2, y > 0\}.$$

Indice : montrer que chaque réseau $\Gamma \subset \mathbf{R}^2$ est engendré par le vecteur non-nul de plus petite longeur $a_1 \in \Gamma$ et le vecteur non-nul de plus petite longeur, a_2, dans $\Gamma/(\mathbf{Z}a_1)$. Utiliser une isométrie et une homothétie pour situer $a_1 = (1, 0)$ et $a_2 = (x, y)$ comme dans l'énoncé.

(c) Soit $M \subset \mathbf{C}^2 \cong \mathbf{R}^4$ l'image de $\mathbf{R}^2$ par l'application

$$(x, y) \mapsto (\exp(ix), \exp(iy)).$$

Soit g la métrique riemannienne sur M induite par la métrique standard de $\mathbf{R}^4$. Montrer que (M, g) est isométrique au tore corespondant à $(x, y) = (0, 1)$ (le tore de Clifford).

(d) Soit $a = (a_1, a_2)$ une base *orthogonale* de $\mathbf{R}^2$. Considérons le groupe discret G engendré par les isométries

$$\gamma_1(x, y) = (x + 1, -y); \quad \gamma_2(x, y) = (x, y + 1).$$

Montrer que le quotient $M := \mathbf{R}^2/G$ est une variété compacte munie d'une metrique plate (M est une bouteille de Klein plate), et que M est revêté par un tore plat *rectangulaire* (i.e. correspondant à $x = 0$ dans (b)).

(e) Trouver le groupe d'isométries riemanniennes d'un tore plat de dimension 2.

(4) Une variété riemannienne (M, g) est dite *homogène* si le groupe d'isométrie riemanniennes $\mathrm{Isom}(M, g)$ agit de manière transitive sur M. Montrer que toute géodésique sur une variété riemannienne homogène est indifinément prolongéable.