Nantes, 10 février 2022

Géométrie riemannienne : TD 1

Répondre aux questions 1 à 3 et donner les justifications nécessaires. A remettre le TD au plus tard le 28 février 2022.

(1) (a) Montrer qu'une variété lisse de dimension n est orientable ssi elle possède une n-forme différentielle $\theta \in C^\infty(M, \wedge^n T^*M)$, telle que pour tout $x \in M$, $\theta_x \neq 0$. (θ est appelée *forme volume*.)

(b) Soit $\pi : \wedge^n T^*M \to M$ le fibré vectoriel de rang 1 de n-formes sur M. Définissons sur la $(n+1)$-variété $N = \wedge^n T^*M$ la n-forme tautologique $\Theta \in C^\infty(N, \wedge^n T^*N)$ par l'égualité

$$\Theta_{x,\theta_x} := \pi^*_{(x,\theta_x)}(\theta_x), \qquad x \in M,\ \theta_x \in \wedge^n T^*_x(M).$$

Montrer que $\Omega := d\Theta$ est une forme volume sur N.

(c) Considérons l'action du group multiplicatif $\mathbb{R}_{>0}$ sur N par

$$\lambda \cdot (x, \theta_x) = (x, \lambda\theta_x), \qquad \lambda \in \mathbb{R}_{>0},\ x \in M,\ \theta_x \in \wedge^n T^*_x(M),$$

est le sous-ensemble ouvert

$$\mathring{N} := \{(x, \theta_x) \in N \ :\ \theta_x \neq 0\}.$$

Montrer que $\mathring{N}$ est invariant sous l'action $\mathbb{R}_{>0}$ et que le quotient de $\mathring{N}$ par l'action de $\mathbb{R}_{>0}$

$$\hat{M} := \mathring{N}/\mathbb{R}_{>0}$$

est une n-variété lisse.

(d) Montrer que la n-forme tautologique Θ sur N est invariante sous l'action de $\mathbb{R}_{>0}$ et qu'elle définie une forme volume sur $\hat{M}$ (donc $\hat{M}$ est orientée par (a)).

(e) Montrer que la projection $\pi : N \to M$ est $\mathbb{R}_{>0}$-invariante et définie une application lisse

$$\breve{\pi} : \hat{M} \to M$$

qui est un revêtement à deux feuilles. En déduire que M est orientable ssi $\hat{M}$ n'est pas connexe. (Dans le cas où M n'est pas orientable, vous en déduisez que $\hat{M}$ est le revêtement à deux feuilles orienté de M.)

(2) Déterminer le groupe d'isométries riemanniennes et le volume riemannien de l'espace projectif réel $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ muni de sa métrique *quotient* standard, provénant de l'identification

$$\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \cong (\mathbb{S}^n, g_{\mathbb{S}^n})/\text{antipod},$$

où antipod est la restriction à $\mathbb{S}^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ de l'application

$$-\mathrm{Id}: \ \mathbf{R}^{n+1} \to \ \mathbf{R}^{n+1}.$$

(3) Rappelons que deux métriques riemanniennes, g_1 et g_2, sur une variété lisse M sont dites *homothétiques* s'il existe une constante $\lambda > 0$ telle que $g_1 = \lambda g_2$. Le but de cet exercice est de classifier les tores plats de dimension 2, à une isométrie et une homothétie près.

(a) Soient $a = (a_1, a_2)$ et $b = (b_1, b_2)$ deux bases de $\mathbf{R}^2$ et $\Gamma_a = \mathbf{Z}a_1 \oplus \mathbf{Z}a_2$, $\Gamma_b = \mathbf{Z}b_1 \oplus \mathbf{Z}b_2$ les réseaux engendrés. Motrer que les tores plats $(T_a, g_a) := (\mathbf{R}^2, g_{st})/\Gamma_a$ et $(T_b, g_b) = (\mathbf{R}^2, g_{st})/\Gamma_b$ sont équivalents, à une isométrie et une homothétie près, si et seulement s'il existe une isométrie de l'espace euclidien $(\mathbf{R}^2, g_{st})$, A, et une constante réelle positive λ, telles que $(\lambda A)(\Gamma_a) = \Gamma_b$.

(b) En utilisant (a), démontrer que l'ensemble des tores plats modulo isométries et homothéties est en bijection avec l'ensemble

$$\mathcal{M} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1, 0 \leq x \leq 1/2, y > 0\}.$$

Indice : montrer que chaque réseau $\Gamma \subset \mathbf{R}^2$ est engendré par le vecteur non-nul de plus petite longeur $a_1 \in \Gamma$ et le vecteur non-nul de plus petite longeur, a_2, dans $\Gamma/(\mathbf{Z}a_1)$. Utiliser une isométrie et une homothétie pour situer $a_1 = (1, 0)$ et $a_2 = (x, y)$ comme dans l'énoncé.

(c) Soit $M \subset \mathbf{C}^2 \cong \mathbf{R}^4$ l'image de $\mathbf{R^2}$ par l'application

$$(x, y) \mapsto (\exp(ix), \exp(iy)).$$

Soit g la métrique riemannienne sur M induite par la métrique standard de $\mathbf{R}^4$. Montrer que (M, g) est isométrique au tore corespondant à $(x, y) = (0, 1)$ (le tore de Clifford).

(d) Soit $a = (a_1, a_2)$ une base *orthogonale* de $\mathbf{R}^2$. Considérons le groupe discret G engendré par les isométries

$$\gamma_1(x, y) = (x + 1, -y); \quad \gamma_2(x, y) = (x, y + 1).$$

Montrer que le quotient $M := \mathbf{R}^2/G$ est une variété compacte munie d'une metrique plate (M est une bouteille de Klein plate), et que M est revêté par un tore plat *rectangulaire* (i.e. correspondant à $x = 0$ dans (b)).

(e) Trouver le groupe d'isométries riemanniennes d'un tore plat de dimension 2.