Nantes, 2022
Vestislav Apostolov,

le 16 mars 2022

Introduction la géométrie riemannienne, TD2

Répondre aux 3 questions suivantes en donnant les justifications nécessaires. A remettre le TD au plus tard le 30 mars 2022.

(1) Soit E un fibré vectoriel réel de rang k sur une variété lisse et connexe M, muni d'une connexion ∇. Notons par $P^{\nabla}(M,E)$ le sous-ensemble de sections lisses $s \in C^{\infty}(M,E)$ qui sont ∇-parallèles, i.e. qui vérifient

$$\nabla_X s = 0, \qquad \forall\, X \in C^{\infty}(M,TM).$$

   (a) Démontrer que $P^{\nabla}(M,E)$ est un sous-espace vectoriel réel de $C^{\infty}(M,E)$.

   (b) En utilisant le Théorème de transport prallèle, démontrer que $P^{\nabla}(M,E)$ est de dimension finie et que

$$\dim_{\mathbb{R}}\Big(P^{\nabla}(M,E)\Big) \leq \mathrm{rang}(E).$$

   (c) Démontrer que si $\dim_{\mathbb{R}}\Big(P^{\nabla}(M,E)\Big) = \mathrm{rang}(E)$ alors

$$E \cong M \times \mathbb{R}^k$$

   et ∇ est isomorphe à la connexion plate $\mathring{\nabla}$ sur $M \times \mathbb{R}^k$.

(2) Soit $f : (\hat{M},\hat{g}) \to (M,g)$ un revêtment riemannien. Montrer que si (M,g) est complète, alors $(\hat{M},\hat{g})$ est aussi complète. En déduire que :

   (a) chaque géodésique de (M,g) est la projection par f d'une géodésique de $(\hat{M},\hat{g})$;

   (b) trouver les géodésiques du tore $\mathbb{T}^2_a$ où $a = \{(1,0),(0,1)\}$ est la base standard de $\mathbb{R}^2$. Calculer le diamètre riemannien de $\mathbb{T}^2_a$.

   (c) montrer qu'une géodésique de $(\mathbb{RP}^n, \mathrm{can})$ est minimale si et seulement si sa longueur est inférieure ou égale à $\pi/2$ et calculer le diamètre de $\mathbb{RP}^n$.

(3) Une varété riemannienne (M,g) est dite *homogène* si le groupe d'isométrie riemanniennes $\mathrm{Isom}(M,g)$ agit de manière transitive sur M. Montrer que toute géodésique sur une variété riemannienne homogène est indifinément prolongéable. En déduire que les variétés homogènes sont complètes. Est-ce que l'espace hyperbolique $(\mathbb{H}^n, g_{\mathrm{can}})$ est une variété riemannienne complète ?