Géométrie riemannienne

Vestislav Apostolov

Nantes, Session A-2022

Rappel: un fibré vectoriel

M est une variété lisse de dimension n.

Définition (Un fibré vectoriel de rang m)

E une variété lisse de dimension $n+m$, munie d'une application surjective et lisse $p : E \to M$, telle que

- $p^{-1}(x) \cong \mathbb{R}^m$ pour tout $x \in M$;
- tout x possède un voisinage $U \ni x$ et un difféomorphisme
$$\psi_U : p^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{R}^m,$$
telle que $\psi_U : p^{-1}(x) \cong \{x\} \times \mathbb{R}^m$.
- sur l'intersection $U \cap V$
$$\psi_U \circ \psi_V^{-1} : (U \cap V) \times \mathbb{R}^m \to (U \cap V) \times \mathbb{R}^m$$
est dans la forme $(x, v) \mapsto (x, g_{UV}(x)v)$ où $g_{UV}(x)$ est une matrice inversible $m \times m$ avec coefficients lisses.

Rappels: examples de fibrés vectoriels

Examples

- TM avec $g_{UV} = \mathbf{Jac}(\varphi_U \circ \varphi_V^{-1})$;
- T^*M avec $g_{UV} = \left(\mathbf{Jac}(\varphi_V \circ \varphi_U^{-1})\right)^{\mathrm{T}}$.
- $T^{p,q}M := \underbrace{TM \otimes \cdots \otimes TM}_{p-\text{times}} \otimes \underbrace{T^*M \otimes \cdots \otimes T^*M}_{q-\text{times}}$;
- $\bigwedge^p(M) \subset T^{0,p}M$;
- $\mathcal{O}(-1) \to \mathbb{R}P^n$, $\mathcal{E}_m \to \mathbb{G}(m, N)$: les fibrés «tautologiques».....

Rappels: sections d'un fibré

Définition

Une section lisse d'un fibré vectoriel $p : E \to M$ est une application lisse qui vérifie

$$s : M \to E, \qquad s \circ p = \mathrm{id}_M.$$

Lemma

$C^\infty(M, E) = \{\text{sections lisses de } E\}$ *est un espace vectoriel réel de dimension infinie.*

Preuve.

Dans une trivialization (U, ψ_U) : $s_U := \psi_U^{-1}(x, f_U(x))$ où $f_U \in C^\infty(U, \mathbb{R}^m)$;
ρ_U une fonction lisse de plateau $\Rightarrow \rho_U s_U \in C^\infty(M, E)$. $\square$

Connexions

Problème

Comment construire un isomorphisme « naturelle » entre $E_x = p^{-1}(x)$ et $E_y = p^{-1}(y)$?

Définition (Connexion)

Une **connexion** ou une **dérivée covariante** sur E est une application $\mathbb{R}$-bilinaire

$$\begin{aligned} C^\infty(M, TM) \times C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, E), \\ (X, s) \to \nabla_X s \in C^\infty(M, E), \end{aligned}$$

qui vérifie pour toute $f \in C^\infty(M)$:

$$\nabla_{fX} s = f \nabla_X s, \qquad \nabla_X fs = df(X)s + f\nabla_X s.$$

Connexions

Définition (Connexion)

Une **connexion** $\nabla : C^\infty(M, TM) \times C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, E)$ vérifie pour toute $f \in C^\infty(M)$:

$$\nabla_{fX} s = f \nabla_X s, \qquad \nabla_X fs = df(X)s + f \nabla_X s.$$

Dans une trivialization $\psi_U : E_U \cong U \times \mathbb{R}^m$:

- $s_j^U(x) := e_j = (0, \dots, \underbrace{1}_{j}, \dots, 0)$ la section « constante »;
- $s(x) = \sum_{j=1}^m a_j(x) s_j^U(x)$, $a_j \in C^\infty(U)$;
- $\nabla_X s = \sum_{j=1}^m \left(da_j(X) s_j^U + a_j(\nabla_X s_j^U) \right)$;
- $\nabla_X s_j^U = \sum_{k=1}^m \theta_{kj}^U(X) s_k^U$, $\theta_{kj} \in \Omega^1(U)$;
- $\nabla s = d^U + \Theta^U$ ou $\Theta^U = \left(\theta_{kj}^U \right) \in \Omega^1(U, \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{R}))$.

Connexions: existence

Théorème 1 (Existence)

Il existe une infinité de connexions sur E.

Preuve.

- Dans une trivialization (U, ψ_U) nous posons $\nabla^U := d^U$ $(\Theta^U = 0)$.
- Si (U_i, ψ_i, ρ_i) un recouvrement de M par des trivialisations de E et ρ_i partition de l'unité:

$$\nabla := \sum_i \rho_i \nabla^{U_i}.$$

- ∇' connexion ssi $\nabla'_X s = \nabla_X s + A_X(s)$ où $A \in C^\infty(M, T^*M \otimes E^* \otimes E)$

$$\nabla = d^U + \Theta^U, \qquad \Theta^U \in C^\infty(U, T^*M \otimes E^* \otimes E).$$

Connexions: transport parallèle

M connexe et ∇ une connexion sur $p : E \to M$

Définition

Soit $\gamma(t) : (0,1) \to M$ une courbe lisse sur M et $s(t) \in E_{\gamma(t)}$ une section lisse le longue de $\gamma(t)$. [1] On dit que $s(t)$ est **parallèle le longue de** $\gamma(t)$ si

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)} s(t) = 0.$$

Dans une trivialization (U, ψ_U): $s(t) = \sum_{j=1}^{m} a_j(t) s_j^U(\gamma(t))$

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)} s(t) := \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\left(\frac{d}{dt} a_j(t) \right)}_{da_j(\dot{\gamma}(t))} s_j^U(\gamma(t)) + \sum_{j,k=1}^{m} \theta_{kj}^U(\dot{\gamma}(t)) a_k(t) s_k^U(\gamma(t)).$$

[1] Le tiré en arrière $\gamma^*(E)$ de E est une fibré sur $(0,1)$ et $s(t)$ est une section lisse de $\gamma^*(E)$.

Connexions: transport parallèle

Lemma

$s(t) = \sum_{j=1}^m a_j(t) s_j^U(\gamma(t))$ est parallèle le longue de $\gamma(t)$ ssi

$$\frac{da_k(t)}{dt} + \sum_{j=1}^m a_j(t)\theta_{kj}^U(\dot\gamma(t)) = 0, \qquad k = 1, \ldots, m.$$

Corollaire

Soit $\gamma : [0,1] \to M$ une courbe lisse avec $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Alors pour $s_0 \in E_x$ il existe unique section parallèle $s(t)$ le longue de $\gamma(t)$ qui vérifie $s(0) = s_0$.

Connexions: transport parallèle

Définition (Transport parallèle)

Soit $\gamma(t) : [0,1] \to M$ une courbe lisse sur M avec $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$. L'application

$$\begin{aligned} P_\gamma : E_x &\to E_y, \\ s_0 &\to s(1), \end{aligned}$$

où $s(t)$ est la section parallèle le longue de $\gamma(t)$ qui vérifie $s(0) = s_0$ s'appèle le **transport parallèle le longue de** $\gamma(t)$.

Connexions: transport parallèle

Proposition (Corollaire de la linéarité du système ÉDO)

P_γ est un application linéaire inversible. De plus,
$P_{\gamma_1} \circ P_{\gamma_2} = P_{\gamma_1 \cdot \gamma_2}$.

Exemple (Transport parallèle de $T\mathbb{R}^n$)

Nous considérons $T\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ est la connexion « plate » qui pour $Y = \sum_{j=1}^n a_j(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ est définie par :

$$\nabla^0_X Y := \sum_{j=1}^n da_j(X) \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right).$$

Alors $Y(t) = \sum_{j=1}^n a_j(t) \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ est parallèle le longue de $\gamma(t)$ ssi

$$\frac{d}{dt} a_j(t) = 0 \Leftrightarrow a_j(t) = \mathrm{const}.$$

Connexions: sections parallèles

Définition (Sections parallèles)

Soit ∇ une connexion sur $E \xrightarrow{p} M$. Une section $s \in C^\infty(M, E)$ est dite **parallèle** par rapport à ∇ si

$$\nabla_X s = 0 \qquad \forall X \in \mathcal{X}(M).$$

L'espace $\mathbb{R}$-linéaire $P^\nabla := \{s \in C^\infty(M, E) \,|\, \nabla s = 0\}$ s'appèle l'espace de sections ∇-parallèles.

Connexions: sections parallèles

Théorème 2
Soit ∇ une connexion sur $E \xrightarrow{p} M$. Alors $\dim P^\nabla \leq \mathrm{rang}(E) = m$. *Si* $\dim P^\nabla = \mathrm{rang}(E)$, *alors* $E \cong M \times \mathbb{R}^m$ *et* $\nabla \cong \nabla^0$.

Preuve.
(a) Supposons que $\{s_1, \dots, s_{m+1}\} \subset P^\nabla$ sont indépendentes.

- en x : $s_{m+1}(x) = \sum_{j=1}^m c_j s_j(x)$ sont dépendants;
- si $\gamma(t)$ est une courbe qui join x et y: $\tilde{s}_j(y) = P_\gamma(s_j(x))$;
- $\nabla s_j = 0 \Rightarrow P_\gamma(s_j(x)) = \tilde{s}_j(y) = s_j(y)$.
- $\Rightarrow s_{m+1}(y) = \sum_{j=1}^m c_j s_j(y)$ car P_γ linéaire.

(b) Si $\{s_1, \dots, s_m\}$ est une base de P^∇ alors $\{s_1(x), \dots, s_m(x)\}$ est une base de E_x; de plus
$\nabla_X \left(\sum_{j=1}^m a_j(x) s_j(x) \right) = \sum_{j=1}^m da_j(X) s_j$. $\square$

Connexions: Groupe de holonomie

Soit M connexe et (E, ∇) un fibré vectoriel de rang m. Notons

$$\Pi(M, x) = \{\gamma(t) \,|\, \gamma(0) = \gamma(1) = x\}$$

l'ensemble des lacets lisses en morceaux, basés en x, muni du « produit » par composition.
Nous avons un homomorphism de groupes

$$\begin{aligned} \Pi(M, x) &\to \mathrm{GL}(E_x) \\ \gamma &\to P_\gamma. \end{aligned}$$

Définition (Groupe d'holonomie)

Les images $\mathrm{Hol}^{\nabla}(x)$ de $\Pi(M, x)$ dans $\mathrm{GL}(E_x)$ pour $x \in M$ sont des sous-groupes conjugués dans $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$, dons la classe d'equivalence s'appèle « **le groupe d'holonomie** » de (E, ∇) $(\mathrm{Hol}(E, \nabla))$.

Connexions: Groupe de holonomie

Exemple

Si $\dim P^{\nabla} = m \Rightarrow \mathrm{Hol}(E, \nabla) = \{1\}$.

Théorème 3

Soit M connexe et $\mathrm{Hol}(E, \nabla) = \{1\}$. Alors $\dim P^{\nabla} = m$.

Preuve.

- Soit $\{s_1(x), \ldots, s_m(x)\}$ une base de E_x.
- Pour tout $y \in M$, soit $\gamma(t)$ une courbe avec $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$ et posons $s_j(y) := P_\gamma(s_j(x))$.
- la définition ne dépende pas de γ car $\mathrm{Hol}(E, \nabla) = \{1\}$;
- Vérifier que $\nabla s_j = 0$.

$\square$

Connexions: La courbure

Problème

Est ce que l'on peut « calculer » $\mathrm{Hol}(E, \nabla)$?

Définition (La courbure d'une connexion)

Soit ∇ une connexion de E. L'application

$$R^{\nabla}_{X,Y} : C^{\infty}(M, E) \to C^{\infty}(M, E),\ X, Y \in \mathcal{X}(M),$$
$$s \to R_{X,Y}(s) := \nabla_{[X,Y]}s - [\nabla_X, \nabla_Y](s)$$

s'appèle **la courbure** de ∇.

Connexions: La courbure

La courbure

$$R^{\nabla}_{X,Y}(s) := \nabla_{[X,Y]}s - \nabla_X(\nabla_Y(s)) + \nabla_Y(\nabla_X(s))$$

vérifie

Proposition

- $R^{\nabla}_{Y,X} = -R^{\nabla}_{Y,X}$;
- $R^{\nabla}(fs) = fR^{\nabla}_{X,Y}s$ et $R^{\nabla}_{fX,Y}s = fR^{\nabla}_{X,Y}(s)$ pour $f \in C^{\infty}(M)$;
- $\Rightarrow R^{\nabla} \in C^{\infty}(M, \left(\bigwedge^2 T^*M\right) \otimes E^* \otimes E)$.

Preuve de la Proposition

La courbure

$$R^{\nabla}_{X,Y}(s) := \nabla_{[X,Y]}s - \nabla_X(\nabla_Y(s)) + \nabla_Y(\nabla_X(s))$$

vérifie $R^{\nabla}(fs) = fs$.

- $\nabla_{[X,Y]}fs = df([X,Y])s + f\nabla_{[X,Y]}s$.
- $$\begin{aligned} \nabla_X(\nabla_Y fs) =& \nabla_X\left(df(Y)s + f\nabla_Y s\right) \\ =& \left(X(df(Y))\right)s + df(Y)\nabla_X s \\ &+ df(X)\nabla_Y s + f\left(\nabla_X(\nabla_Y s)\right). \end{aligned}$$

Preuve de la Proposition

La courbure

$$R^{\nabla}_{X,Y}(s) := \nabla_{[X,Y]}s - \nabla_X(\nabla_Y(s)) + \nabla_Y(\nabla_X(s))$$

vérifie $R^{\nabla}(fs) = fs$.

- $\nabla_{[X,Y]}fs = df([X,Y])s + f\nabla_{[X,Y]}s$.
-

$$\begin{aligned}\nabla_X(\nabla_Y fs) - \nabla_Y(\nabla_X fs) &= (X(df(Y)) - Y(df(X)))\, s \\ &\quad + f\,(\nabla_X(\nabla_Y s) - \nabla_Y(\nabla_X s)) \\ &= (df([X,Y]))\, s + f\,([\nabla_X, \nabla_Y]s)\,.\end{aligned}$$

La courbure dans une trivialization

Soit (U, ψ_U) une trivialization de E et

$$\nabla_X s = d^U s(X) + \Theta^U(X), \;\; \Theta = \Theta^U \in \Omega^1(U, \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{R}),$$

$$\nabla_X \Big(\sum_{j=1}^{m} a_j(x) s_j^U \Big) = \sum_{j=1}^{m} da_j(X) s_j^U + \sum_{j,k=1}^{m} \theta_{kj}(X) a_j s_k^U.$$

La courbure

$$\begin{aligned} R^{\nabla}_{X,Y}(\sum_{j=1}^{m} a_j s_j^U) &= a_j \sum_{j=1}^{m} R^{\nabla}_{X,Y}(s_j^U) \\ &= \sum_{j,k=1}^{m} a_j \omega_{kj}(X, Y) s_k^U, \end{aligned}$$

où $\Omega = (\omega_{jk}) \in \Omega^2(U, \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{R}))$.

La courbure dans une trivialisation

Proposition (Équations de Cartan)

Nous avons $\Omega = -d\Theta - \Theta \wedge \Theta$.

Preuve.

$$\nabla_X s_j^U = \sum_{k=1}^{m} \theta_{kj} s_k^U$$

$$\begin{aligned} R^{\nabla}_{X,Y}(s_j^U) =& \nabla_{[X,Y]} s_j^U - [\nabla_X, \nabla_Y](s_j^U) = \sum_{k=1}^{m} \omega_{kj}(X,Y) s_k^U \\ &= \sum_{k=1}^{m} \underbrace{(\theta_{kj}([X,Y]) - X(\theta_{kj}(Y)) + Y(\theta_{kj}(X))}_{-(d\Theta_{kj})(X,Y)} s_k^U \\ &\quad \underbrace{- \sum_{k,\ell=1}^{m} \left(\theta_{kj}(Y)\theta_{\ell k}(X) - \theta_{kj}(X)\theta_{\ell k}(Y)\right) s_\ell^U}_{(\Theta\wedge\Theta)_{\ell j}(X,Y)} \end{aligned}$$

La courbure et le groupe de holonomie

Notons

$$\mathcal{R}_x := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{R^{\nabla}_{u,v} \in \mathrm{End}(E_x)) \mid u, v \in T_x M\} \subset \mathrm{End}(E_x).$$

Théorème (Ambrose–Singer)

(a) $G := \mathrm{Hol}^{\nabla}(x) \subset \mathrm{GL}(E_x)$ est une sous-variété lisse et

$$\mathcal{R}_x \subset T_{\mathbf{I}} G \subset T_{\mathbf{I}} \mathrm{GL}(E_x) \cong \mathrm{End}(E_x).$$

(b) $T_I G = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{P_\gamma^{-1} \mathcal{R}_y\}$ où y parcours les points de M et γ parcours toutes le courbes avec $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.
(c) Si $\pi_1(M) = \{1\}$ alors G est connexe et $T_I G$ determine G.

Application : connexions plates

Définition (Connexion plate)

Une connexion ∇ sur E est dite **plate** si $R^\nabla \equiv 0$.

Supposons que $\mathrm{Hol}(E, \nabla) = \{1\} \Leftrightarrow \dim P^\nabla = m$. Alors $R^\nabla(s_j) = 0 \Rightarrow R^\nabla \equiv 0$.

Réciproquement, si $R^\nabla \equiv 0$ et $\pi_1(M) = \{1\}$ par le théorème d'Ambrose–Singer $\mathrm{Hol}(E, \nabla) = \{1\}$ est donc il existe une base de sections parallèles.

Sur chaque ouvert contractile $U \subset M$ nous avons m sections parallèles indépendantes $\{s_1^U, \ldots, s_m^U\}$ et sur $U \cap V$:

$$s_j^V(x) = \sum_{k=1}^{m} a_{kj}(x) s_k^U(x), \qquad 0 = \nabla_X s_j^V = \sum_k da_{kj}(X) s_k^U.$$

Application : connexions plates

Théorème (Fibrés plats)

Soit $E \to M$ une fibré. Les conditions suivantes sont équivalentes

- *E admet une connection plate ∇*
- *E admet un atlas de trivialisations avec $g_{UV} \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ constantes.*

Corollaire

Les fibrés plats sont classifié par $H^1(M, \mathrm{GL}(m, \mathbb{R}))$.