Cours « Introduction à la géométrie riemannienne et kahlérienne »

Enseignant: Vestislav Apostolov

Prérequis: « Géométrie différentielle »

FR n° 2962 du CNRS Mathématiques des Pays de Loire
Centre Henri Lebesgue Centre de Mathématiques

La géométrie différentielle étudie des objets dits **variétés différentielles**.

Géométrie différentielle : rappels

La géométrie différentielle étudie des objets dits **variétés différentielles**.
Une n-variété différentielle est un objet géométrique qui a la même «forme locale» que l'espace euclidien à n-dimensions. Comprendre sa «forme globale» est un problème profond.

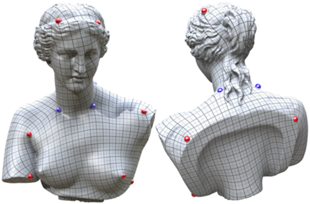

Figure: Les variétés différentielles sont obtenues par recollements de petits morceaux («cartes») qui ressemblent à des sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$.

But de la géométrie différentielle

Le but de la géométrie différentielle est d'étudier les propriétés **globales** des variétés, conservées sous des déformations dites **lisses**, telles que l'étirement, la compression, la torsion, mais pas la déchirure ou le collage.

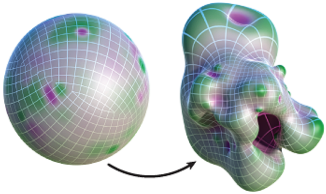

Figure: Deux variétés liées par déformations lisses

But de la géométrie différentielle

Le but de la géométrie différentielle est d'étudier les propriétés **globales** des variétés, conservées sous des déformations dites **lisses**, telles que l'étirement, la compression, la torsion, mais pas la déchirure ou le collage.

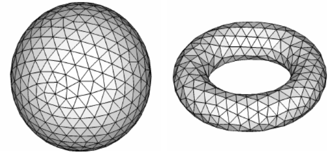

Figure: Deux variétés qui ne peuvent pas être liées par déformations lisses

« L'outil » : la géométrie riemannienne (Bernhard Riemann, XIX-ème siècle)

M une n-variété.

« L'outil » : la géométrie riemannienne (Bernhard Riemann, XIX-ème siècle)

M une n-variété.

- une **métrique riemannienne** dans une carte de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ est donnée par $g = \left[g_{ij}(x)\right]_{n \times n}$ (symétrique, définie positive) ;

« L'outil » : la géométrie riemannienne (Bernhard Riemann, XIX-ème siècle)

M une n-variété.

- une **métrique riemannienne** dans une carte de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ est donnée par $g = \Big[g_{ij}(x) \Big]_{n \times n}$ (symétrique, définie positive) ;
- pour une courbe $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ sur M, sa **longueur** est définie par

$$\int \Big[\sum_{i,j} g_{ij}(x(t)) \dot{x}_i(t) \dot{x}_j(t) \Big]^{\frac{1}{2}} dt;$$

« L'outil » : la géométrie riemannienne (Bernhard Riemann, XIX-ème siècle)

M une n-variété.

- une **métrique riemannienne** dans une carte de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ est donnée par $g = \left[g_{ij}(x)\right]_{n \times n}$ (symétrique, définie positive) ;
- pour une courbe $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ sur M, sa **longueur** est définie par
$$\int \left[\sum_{i,j} g_{ij}(x(t))\dot{x}_i(t)\dot{x}_j(t)\right]^{\frac{1}{2}} dt;$$
- on définit : **distance**, **angles**, **volume**,....

« L'outil » : la géométrie riemannienne (Bernhard Riemann, XIX-ème siècle)

M une n-variété.

- une **métrique riemannienne** dans une carte de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ est donnée par $g = \Big[g_{ij}(x)\Big]_{n\times n}$ (symétrique, définie positive) ;
- pour une courbe $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ sur M, sa **longueur** est définie par

$$\int \Big[\sum_{i,j} g_{ij}(x(t))\dot{x}_i(t)\dot{x}_j(t)\Big]^{\frac{1}{2}} dt;$$

- on définit : **distance**, **angles**, **volume**,....

Idée principale : une déformation lisse $\widetilde{M}$ de M $\leftrightarrow$ un changement de la métrique riemannienne $\tilde{g} = \Big[\tilde{g}_{ij}(x)\Big]_{n\times n}$ sur M.

Les 2-variétés fermées dans $\mathbb{R}^3$

Est-ce que l'on peut obtenir une 2-variété fermée et orientée $M \subset \mathbb{R}^3$ par déformations lisses de la sphère ronde ?

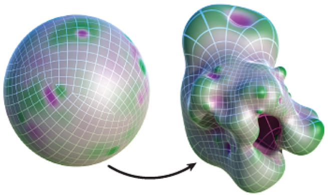

Figure: la sphère M

Une approche moderne après Poincaré

Est-ce que l'on peut obtenir $M \subset \mathbb{R}^3$ par déformations lisses de la sphère ronde ?

- (**Killing 1891**) Si

$$g = \begin{bmatrix} e^{2u(x,y)} & 0 \\ 0 & e^{2u(x,y)} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

est une métrique riemannienne sur M telle que

$$K(x,y) = -e^{-2u}(u_{xx} + u_{yy}) \equiv 1,$$

alors M est la sphère.

Une approche moderne après Poincaré

Est-ce que l'on peut obtenir $M \subset \mathbb{R}^3$ par déformations lisses de la sphère ronde ?

- (**Killing 1891**) Si

$$g = \begin{bmatrix} e^{2u(x,y)} & 0 \\ 0 & e^{2u(x,y)} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

  est une métrique riemannienne sur M telle que

$$K(x,y) = -e^{-2u}(u_{xx} + u_{yy}) \equiv 1,$$

  alors M est la sphère.

- Soit g la métrique riemannienne induite sur $M \subset \mathbb{R}^3$. Modifier g par $\tilde{g} = e^{2f(x,y)}g$ $(\tilde{u} = u + f)$ de manière que

$$1 \equiv \widetilde{K} = e^{-2(f+u)}\Big(- (f_{xx} + f_{yy}) + e^{2u}K \Big).$$

Une approche moderne après Poincaré

Est-ce que l'on peut obtenir $M \subset \mathbb{R}^3$ par déformations lisses de la sphère ronde ?

Est-ce que l'on peut résoudre l'ÉDP (pour $f(x, y)$ inconue)

$$-(f_{xx} + f_{yy}) + e^{2u} K(x, y) = e^{2(f+u)}?$$

Est-ce que l'on peut obtenir $M \subset \mathbb{R}^3$ par déformations lisses de la sphère ronde ?

Est-ce que l'on peut résoudre l'ÉDP (pour $f(x,y)$ inconue)

$$-(f_{xx} + f_{yy}) + e^{2u}K(x,y) = e^{2(f+u)}?$$

Intégration sur M

$$\chi(M) := \frac{1}{2\pi}\int_M e^{2u}K dxdy = \frac{1}{2\pi}\int_M \left((f_{xx} + f_{yy}) + e^{2(f+u)}\right)dxdy$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_M e^{2(f+u)}dxdy > 0.$$

Une approche moderne après Poincaré

Est-ce que l'on peut obtenir $M \subset \mathbb{R}^3$ par déformations lisses de la sphère ronde ?

Est-ce que l'on peut résoudre l'ÉDP
$-(f_{xx} + f_{yy}) + e^{2u}K = e^{2(f+u)}$?

Obstruction $\chi(M) = \frac{1}{2\pi} \int_M e^{2u} K dxdy > 0$.

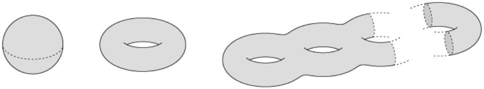

Figure: $\chi(M) = 2 - 2\sharp(\text{trous})$

Une approche moderne après Poincaré

Est-ce que l'on peut obtenir $M \subset \mathbb{R}^3$ par déformations lisses de la sphère ronde ?

Est-ce que l'on peut résoudre l'ÉDP
$-(f_{xx} + f_{yy}) + e^{2u}K = e^{2(f+u)}$?

Obstruction $\chi(M) > 0$.

Si $\chi(M) > 0$ alors l'ÉDP admet une solution (**Poincaré**, **Berger 1968**).

Généralisations en dimension $\dim(M) = n \geq 2$

Partie I : Étude des variétés riemanniennes

- Étudier la distance riemanniennes (géodésiques, complétude, diamètre, rayon d'injectivité);
- Définir la notion de courbure (riemannienne, sectionnelle, de Ricci, scalaire).
- Caractériser les variétés à courbure sectionnelle constante.
- Lier la courbure à la topologie : courbure sectionnelle/Ricci positive (Bonnet–Myers, Synge) ou négative (Cartan–Hadamard).

Partie II : Étude les variétés complexes munies des métriques kahlériennes

Théorème d'uniformisation du Poincaré

Toute courbe complexe compacte admet une métrique riemannienne compatible à courbure de Gausse constante.

Problème (Calabi 1954, étudié par Yau, Tian, Donaldson,....)

Sur une variété complexe compacte kahlérienne, trouver une métrique riemannienne compatible *canonique* (e.g. « courbure scalaire constante »).

Généralisations en géométrie complexe

Partie II : Étude les variétés complexes munies des métriques kahlériennes

Théorème d'uniformisation du Poincaré

Toute courbe complexe compacte admet une métrique riemannienne compatible à courbure de Gausse constante.

Problème (Calabi 1954, étudié par Yau, Tian, Donaldson,....)

Sur une variété complexe compacte kahlérienne, trouver une métrique riemannienne compatible *canonique* (e.g. « courbure scalaire constante »).

Sur une variété kahlérienne $\Rightarrow$ problème de déformations par une seule fonction $\Rightarrow$ réduire à une ÉDP $\Rightarrow$ formuler les obstructions [**géométrie algèbrique**] $\Rightarrow$ résoudre l'ÉDP si les obstructions sont satisfaites [**analyse globale**].

Bibliographie

- Arthur L. Besse. *Einstein manifolds*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- Olivier Biquard. *Géométrie différentielle et riemannienne*, Notes de cours M2.
- Sylvestre Gallot. Dominique Hullin, and Jacques Lafontaine. *Riemannian geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2004.
- Paul Gauduchon, *Calabi's extremal Kähler metrics: An elementary introduction*. Notes de cours.
- Kobayashi & Nomizu. *Foundations of Differential Geometry*, Vol. I,II. Interscience Pub.
- Simon Salamon, *Riemanniann Geometry and Holonomy Groups*. Pitman Res. Notes in Math. Longman 1989.