Activité 8 : Systèmes d’équations

*Point d’insertion de cette activité dans le cours :* comme toute première introduction aux systèmes de deux équations à deux inconnues.

Le but de cette activité est de développer chez les élèves la compréhension des méthodes de résolution algébrique de comparaison et de substitution.

**Leçon 1** (Parties I et II, **introduction aux systèmes d’équations**)

Partie I (avec calculatrice, 25 minutes) : Utiliser l’évaluation numérique pour vérifier des solutions des équations d’un type donné

(A) *Équations du premier degré à une seule inconnue*

1. Le tableau suivant contient une équation et quelques valeurs numériques.

*Sans résoudre* l’équation donnée un peu plus bas en en-tête du tableau, détermine (en utilisant ta calculatrice) si les valeurs de la colonne de gauche sont des solutions de l’équation. Mais avant d’aller de l’avant, décris et justifie (dans le rectangle ci-dessous) la stratégie que tu vas utiliser pour déterminer si un nombre donné est une solution. Décris aussi quelles informations ta calculatrice te donnera.

1. Travaille maintenant avec ta calculatrice (mais sans résoudre). Remplis le tableau ci-dessous avec l’information appropriée.



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Valeurs pour *x* | Commande tapée à la calculatrice | Résultat affiché à la calculatrice |
| *x* = -2 |  |  |
| *x* = 2 |  |  |
| *x* = -5 |  |  |

1. Y a-t-il d’autres solutions pour cette équation ? Si oui, trouves-en une et justifie ton choix.

(B) *Équations du premier degré à deux inconnues*

1. Le tableau suivant contient une autre équation et quelques couples de valeurs numériques.

*Sans résoudre* cette équation mais en utilisant ta calculatrice, détermine si les couples de valeurs de la colonne de gauche sont solutions de l’équation. Mais avant d’aller de l’avant, décris et justifie (dans le rectangle ci-dessous) la stratégie que tu vas utiliser pour déterminer si un couple de nombres donné est une solution. Décris aussi quelles informations ta calculatrice te donnera.

1. Travaille maintenant avec ta calculatrice (mais sans résoudre). Remplis le tableau ci-dessous avec l’information appropriée.



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Valeurs pour le couple (*x , y*) | Commande tapée à la calculatrice | Résultat affiché par la calculatrice |
| *x* = 3 et *y* = 12 |  |  |
| *x* = -3 et *y* = 4 |  |  |
| *x* = -18 et *y* = -6 |  |  |

1. Y a-t-il d’autres solutions pour cette équation? Si oui, trouves-en une et justifie ton choix.

# (C) *Systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues*

1. Le tableau suivant contient un système d’équations et quelques couples de valeurs numériques.

*Sans résoudre* ce système d’équations mais en utilisant encore ta calculatrice, détermine si les couples de valeurs de la colonne de gauche sont solutions de l’équation. Mais avant de poursuivre, décris et justifie (dans le rectangle ci-dessous) la stratégie que tu vas utiliser pour déterminer si un couple de nombres donné est une solution. Décris aussi quelles informations ta calculatrice te donnera.

2. Travaille maintenant avec ta calculatrice (mais sans résoudre). Remplis le tableau ci-dessous avec l’information appropriée.



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Valeurs pour le couple (*x* ,  *y*) | Commande tapée à la calculatrice | Résultat affiché par la calculatrice |
| *x* = 0 et *y* = 2 |  |  |
| *x* = 4 et *y* = 3 |  |  |
| *x* = 2 et *y* = 1 |  |  |

3. Y a-t-il d’autres solutions pour ce système d’équations? Si oui, trouves-en une et justifie ton choix.

4. Est-ce que d’autres questions ou idées te sont venues à l’esprit quand tu as travaillé sur ces trois types d’équations ? Si oui, quelles sont-elles ?

###### Discussion en classe sur la Partie I

##### *Questions pour la discussion* (après que les élèves aient fini la Partie I)

* Comment avez-vous vérifié que les valeurs données étaient des solutions ?
* Parmi les valeurs numériques données, lesquelles étaient des solutions ?

Comment la calculatrice vous donne-t-elle cette information ? Par exemple, comment interprétez-vous l’affichage suivant :

«  **|** *x* = 2 false »

* Qu’avez-vous répondu à la question : Pouvez-vous trouver d’autres solutions aux équations (ou systèmes d’équations) données ?
* Quelles questions particulières vous sont venues lorsque vous avez travaillé sur ces trois types d’équations ?

**Partie II (avec calculatrice, 35 minutes) :**

**Interprétation des solutions données par la calculatrice**

**pour les équations à une ou deux inconnues**

II (A) *Résolution d’une équation à une inconnue*

Utilise la commande “SOLVE” de ta calculatrice pour résoudre l’équation suivante :

4(3*x*–7) = 2(3–*x*)+5

|  |  |
| --- | --- |
| Commande tapée à la calculatrice | Résultat affiché par la calculatrice |
|  |  |

II (B) *Résolution d’une équation à deux inconnues*

Les six questions suivantes concernent l’équation 2*x*+7 = 8*y*+11.

1. Selon toi, qu’affichera la calculatrice si tu lui demandes de résoudre cette équation pour *x*?

2. Utilise ta calculatrice pour résoudre cette équation pour *x*

|  |  |
| --- | --- |
| Commande tapée à la calculatrice | Résultat affiché par la calculatrice |
|  |  |

3. Comment interprètes-tu le résultat affiché par la calculatrice ?

4. Selon toi, qu’affichera la calculatrice si tu lui demandes de résoudre cette équation pour *y*?

5. Utilise la calculatrice pour résoudre l’équation 2*x*+7 = 8*y*+11 pour *y*

|  |  |
| --- | --- |
| Commande tapée à la calculatrice | Résultat affiché par la calculatrice |
|  |  |

6. Comment interprètes-tu le résultat affiché par la calculatrice ?

II (C) *Distinctions entre les solutions d’équations à une et à deux inconnues*

1. Tu as probablement remarqué que dans la partie II (A), la calculatrice affiche une valeur numérique comme solution pour *x*. Par ailleurs, dans la partie II (B), la calculatrice affich la solution pour *x* sous la forme d’une expression algébrique. Comment expliques-tu cette différence ?

2. Comment peux-tu utiliser les expressions affichées par la calculatrice pour trouver des solutions numériques à l’équation 2*x*+7 = 8*y*+11 ?

##### **Discussion en classe sur la Partie II A, B, C**

Questions pour la discussion (après que les élèves aient fini la Partie II A, B, C)

• Pourquoi est-ce que la calculatrice affiche une expression en *y* ou en *x* lorsqu’on utilise la commande SOLVE pour résoudre l’équation 2*x*+7 = 8*y*+11 ?

• Comment interpréter les expressions produites par la commande SOLVE pour les équations à deux inconnues ?

• Comment pouvons-nous utiliser ces expressions pour trouver des solutions numériques à ces équations ?

*Points à soulever :*

1. Les couples de solutions numériques ne sont pas des couples trouvés de manière aléatoire; ils sont déterminés par les contraintes de l’équation.
2. Les couples de solutions numériques engendrés par la règle *x* = *f*(*y*)… sont les mêmes que ceux engendrés par la règle *y* = *f*–1(*x*)…

**Exemple**

En utilisant les expressions obtenues à l’aide de la commande SOLVE,

*x* = 2(2*y*+1) et *y* =,

utiliser la calculatrice pour générer des coupes de solutions numériques.

(i) Générer des couples de solutions numériques avec la règle *x* = 2(2*y*+1) :

*x* = 2(2*y*+1) **|** *y* = 1 →*x* = 6

*x* = 2(2*y*+1) **|** *y* = 2 →*x* = 10

*x* = 2(2*y*+1) **|** *y* = 3 →*x* = 14

(ii) Générer les mêmes couples de solutions numériques avec la règle *y* =:

*y* = **|** *x* = 6 →*y* = 1

*y* = **|** *x* = 10 →*y* = 2

*y* = **|** *x* = 14 →*y* = 3

(iii) Vérifier une de ces solutions dans l’équation originale :

2*x* + 7 = 8*y* + 11 **|** *x* = 6 et *y* = 1 →true

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

II **(**D**)** *Utilisation de la calculatrice pour trouver et vérifier des solutions d’équations à deux inconnues* (à faire compléter en devoir si nécessaire)

1. Utilise la calculatrice pour trouver trois solutions à chacune des équations (en gardant trace de ta démarche dans les tableaux ci-dessous). Pour chaque équation, utilise ta calculatrice pour vérifier au moins une de ces solutions.

(a) 

|  |  |
| --- | --- |
| Commande tapée à la calculatrice | Résultat affiché par la calculatrice |
|  |  |

(b) 

|  |  |
| --- | --- |
| Commande tapée à la calculatrice | Résultat affiché par la calculatrice |
|  |  |

2. Mentionne au moins une question ou une idée que tu as eue en faisant la partie II D (par exemple, une question portant sur les difficultés que tu as éprouvées).

**Leçon 2** (Parties IIIA, IIIB, IIIC)

*Point d’insertion* *:* après que les élèves aient travaillé les méthodes de comparaison et de substitution telles que présentées dans le manuel, pp. 126-128.

Préambule portant sur le devoir donné la veille : questions, commentaires, etc.

(5 minutes)

**Partie IIIA (papier-crayon, 15 minutes) :**

**Revue des méthodes de comparaison et de substitution**

Discussion d’introduction : « Vous vous souvenez que nous avons déjà discuté de ce qu’on entend par système d’équations ».

1. « Comment l’expliqueriez-vous à quelqu’un qui n’en a jamais entendu parler? »
2. « Donnez un exemple d’un système d’équations »
3. « Que peut-on dire du nombre de solutions d’un système d’équations linéaires? »

**Travail individuel**

1. Utilisons la méthode de COMPARAISON pour résoudre un système d’équations linéaires (voir la page 126 de ton manuel).

|  |  |
| --- | --- |
| MÉTHODE DE COMPARAISON  La méthode de comparaison algébrique consiste à : | *x* + 3*y* = 5  7*x* + 6*y* = 20 |
| 1. Isoler la même inconnue dans chacune des équations, créant ainsi deux expressions avec une seule inconnue commune. | *y* = (5 – *x*)/3  *y* = (20 – 7*x*)/6 |
| 2. Poser une égalité entre les deux expressions obtenues à l’étape 1, obtenant ainsi une équation à une inconnue. | (5 – *x*)/3 = (20 – 7*x*)/6 |
| 3. Résoudre l’équation ainsi obtenue. | (5 – *x*)/3 = (20 – 7*x*)/6  2(5 – *x*) = (20 – 7*x*)  10 – 2*x* = 20 – 7*x*  7*x* – 2*x* = 20 – 10  5*x* = 10  *x* = 2 |
| 4. Substituer la valeur numérique résultante dans l’une des équations du système, pour calculer la valeur de l’autre inconnue du couple solution. | *y* = (5 – *x*)/3 = (5 – 2)/3 = 1  Le couple solution est donc (*x*, *y*) = (2, 1)  Vérifie-le ! |

*Question :* pourquoi penses-tu que cette méthode est appelée « méthode de comparaison » (en d’autres mots, en quoi fait-on une *comparaison* dans cette méthode) ?

1. Utilisons la méthode de SUBSTITUTION pour résoudre un système d’équations linéaires (voir la page 128 de ton manuel)

|  |  |
| --- | --- |
| MÉTHODE DE SUBSTITUTION  La méthode de substitution algébrique consiste à : | 2*x* + 3*y* = 25  5*x* + *y* = 30 |
| 1. Isoler, si nécessaire, une des inconnues dans une des équations. | *y* = 30 – 5*x* |
| 2. Substituer l’expression obtenue à l’étape 1 à l’inconnue appropriée dans l’autre équation, produisant ainsi une équation à une seule inconnue. | 2*x* + 3(30 – 5*x*) = 25 |
| 3. Résoudre l’équation obtenue à l’étape 2. | 2*x* + 90 – 15*x* = 25  -13*x* = 25 – 90  -13*x* = -65  *x* = 65/13 |
| 4. Substituer la valeur obtenue dans l’une des équations du système pour calculer la valeur correspondante de l’autre inconnue du couple solution. | *y* = 30 – 5(65/13)  = 65/13  Le couple solution est  (*x*, *y*) = (65/13, 65/13)  Vérifie-le ! |

*Question :* Pourquoi penses-tu que cette méthode est appelée « méthode de substitution » ?

1. De quelle façon ces deux méthodes (de comparaison et de substitution) te permettent-elles de réduire la situation donnée à une autre qu’on sait déjà traiter ?

# **Discussion en classe sur la Partie IIIA**

Discussion brève portant sur les réponses fournies par les élèves aux questions 1, 2 et 3.

**Partie IIIB (avec calculatrice, 25 minutes) : Méthode de comparaison et calculatrice**

*Remarque pour l’enseignant.*Il est possible que les élèves éprouvent des difficultés avec cette partie. Si certains ont des difficultés conceptuelles avec la méthode de comparaison, ils trouveront que le passage de la méthode papier-crayon à la méthode correspondante sur la calculatrice est tout un défi. Nous avons donc deux objectifs pour cette section : (a) utiliser cette activité comme un indicateur de leurs difficultés, et (b) leur fournir une occasion d’affronter ces difficultés/obstacles. En ce qui concerne (b), un obstacle possible peut être l’absence d’un principe qui justifierait la création d’une égalité comportant deux expressions algébriques exprimant une inconnue en termes de l’autre. Dans ce cas, une discussion portant sur la propriété de transitivité de l’égalité peut être utile.

Voici un système d’équations linéaires : 

1. Utilise ta calculatrice pour résoudre ce système en te servant de la méthode de comparaison (en gardant trace de ta démarche dans les tableaux ci-dessous).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| La méthode de comparaison consiste à : | Commande tapée à la calculatrice | Résultat affiché par la calculatrice |
| 1. Isoler la même inconnue dans chaque équation, créant ainsi deux expressions avec une seule inconnue commune |  |  |
| 2 & 3. Égaler les deux expressions obtenues à l’étape 1, obtenant ainsi une équation à une inconnue ; résoudre cette équation |  |  |
| 4. Remplacer la valeur obtenue dans l’une des équations du système pour calculer la valeur de l’autre inconnue du couple solution |  |  |

2. Comment utiliser la calculatrice pour vérifier que ta solution est correcte ?

3. À L’étape 4 de la question précédente, tu as remplacé la valeur obtenue à l’étape 3 (pour la première inconnue) dans l’une des équations. Remplace maintenant cette même valeur (obtenue à l’étape 3) dans l’autre équation. Que constates-tu ? Pourquoi en est-il ainsi ?

# **Discussion en classe sur la Partie IIIB**

Questions pour la discussion (après que les élèves aient complété la Partie IIIB)

* Comment avez-vous répondu à la question 2 ci-dessus : « Comment utiliser la calculatrice pour vérifier que ta solution est correcte ? »
* Qu’avez-vous remarqué lorsque vous avez substitué la valeur obtenue à l’étape 3 dans l’autre équation ? Comment expliquer ce phénomène ? (obtenir la même valeur dans les deux cas ; peut-être que certains élèves parleront du point d’intersection de deux droites, mais nous sommes intéressés à voir si l’un d’entre eux va suggérer une explication algébrique, à savoir qu’en substituant une valeur particulière de *x* dans les deux équations, ils obtiennent la même valeur pour *y*)
* La difficulté du choix de l’équation qui doit être utilisée pour l’étape 4 va probablement faire surface. Avec la calculatrice, nous ne substituons pas dans l’équation originale parce que la substitution ne donnera pas immédiatement la valeur de l’autre inconnue. L’équation donnée est simplement affichée sous une autre forme puisque seulement la substitution aura été faite, mais pas la simplification.
* Quelle est la logique derrière les deux premières étapes de la méthode de comparaison et comment est-ce lié aux étapes 3 et 4 de cette méthode ? (points à soulever : les principes supportant les deux premières étapes sont basés sur l’équivalence et la transitivité de l’égalité ; les deux premières étapes permettent d’obtenir une équation avec seulement une inconnue, cas avec lequel nous sommes déjà familier ; et trouver la valeur de cette inconnue permet d’obtenir la valeur de l’autre inconnue par substitution).

**Partie IIIC (avec calculatrice, 15 minutes) : Méthode de substitution et calculatrice**

**Remarque pour l’enseignant.**  Dans cette section, un des obstacles possibles a trait au remplacement d’une inconnue par une expression algébrique. Suggestion : si, en vous référant à la règle *x*=5 *–* 3*y* satisfaisant la première équation, les élèves sont capables de conceptualiser « 5 *–* 3*y* » comme un objet et pas seulement comme un processus, ils seront dans une meilleure position pour donner du sens à la substitution de *x* par 5 *–* 3*y* dans la seconde équation.

1. Utilise ta calculatrice pour résoudre le système suivant en te servant de la méthode de substitution (en gardant trace de ta démarche dans les tableaux ci-dessous).



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| La méthode de substitution consiste à : | Commande tapée à la calculatrice | Résultat affiché par la calculatrice |
| 1. Isoler, si nécessaire, l’une des inconnues dans l’une des équations. |  |  |
| 2. Substituer l’expression obtenue à l’étape 1 pour l’inconnue appropriée dans l’autre équation, créant ainsi une équation à une seule inconnue. |  |  |
| 3. Résoudre l’équation obtenue à l’étape 2. |  |  |
| 4. Substituer la valeur obtenue dans l’une des équations du système pour calculer la valeur de l’autre inconnue, et former le couple solution. |  |  |

2. Comment peux-tu vérifier avec la calculatrice que ta solution est correcte ?

3. Des deux méthodes (comparaison et substitution), laquelle préfères-tu ? Pourquoi ?

4. Qu’est-ce que ces deux méthodes ont en commun ? (STP, dis-le dans tes propres mots, sans retranscrire les étapes de ces méthodes.)

# **Discussion en classe de la Partie IIIC**

Questions pour la discussion (après que les élèves aient fini la Partie IIIC)

Pour la question 2, nous suggérons une investigation plus profonde sur les idées que les élèves ont de la vérification et de la notion de solution, et ce en demandant : « Lorsque nous disons qu’une certaine paire est une solution d’un système d’équations, qu’est-ce que cela signifie ? »

Une question possible liée à la question 4 ci-dessus : « Si nous parlons de la logique sous-jacente à ces deux méthodes, de quelles manières ces deux méthodes se ressemblent-elles ? »

### Devoir

À l’aide de ta calculatrice et de la méthode (comparaison ou substitution) qui te sembles la plus appropriée, résous les systèmes d’équations linéaires suivants :

(1)

*y* + 1 = *x* + 6

*y* – 4 = -*x* + 3

(2)

3*x* + *y* = 23

#### 2x + 3y = 48.