RÉCURSIVITÉ : LES FONCTIONS RÉCURSIVES

MATHIEU BÉLANGER

1. Définition de la récursivité

Dans un premier ordre d'idées, nous introduisons la notion de récursivité.

Définition.

(1) Les fonctions suivantes sont dites *fonctions initiales* :

- (I) la *fonction nulle* : $Z(x) = 0$ pour tout x ;
- (II) la *fonction successeur* : $N(x) = x + 1$ pour tout x ;
- (III) les *fonctions de projection* : $U_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ pour tout $x_1, \ldots, x_n$.

(2) Les règles suivantes permettent d'obtenir de nouvelles fonctions à partir de fonctions déjà introduites :

- (IV) *Substitution* : Une fonction f est dite *obtenue par substitution* à partir des fonctions $g(y_1, \ldots, y_m), h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_m(x_1, \ldots, x_n)$ si

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_m(x_1, \ldots, x_n))$$

- (V) *Récursivité* : Une fonction f est dite *obtenue par récursivité* à partir des fonctions g et h si

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n, 0) &= g(x_1, \ldots, x_n) \\ f(x_1, \ldots, x_n, y+1) &= h(x_1, \ldots, x_n, y, f(x_1, \ldots, x_n, y)) \end{aligned}$$

Les *paramètres* de la récursivité sont $x_1, \ldots, x_n$ où $n = 0$ est permis.

- (VI) *Opérateur μ restreint* : Soit $g(x_1, \ldots, x_n, y)$ une fonction telle que pour tout $x_1, \ldots, x_n$, il existe y tel que $g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$. Posons $\mu y(g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0)$ le plus petit y tel que $g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$. Soit $f(x_1, \ldots, x_n) = \mu y(g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0)$. La fonction f est dite *obtenue par l'opérateur μ restreint* à partir de g si un tel y existe, c'est-à-dire si, pour tout $x_1, \ldots, x_n$, il existe un plus petit y tel que $g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$.

(3) Une fonction f est *récursive primitive* si et seulement si :

- (a) il existe une suite finie de fonctions $f_0, \ldots, f_n$ telle que $f_n = f$,
- (b) pour tout $0 \leq i \leq n$, f_i est une fonction initiale ou f_i s'obtient des fonctions f_j $(j < i)$ au moyen des règles de substitution et de récursivité.

Intuitivement, une fonction est donc récursive primitive si et seulement si elle s'obtient de fonctions initiales par un nombre fini d'applications des règles de substitution et de récursivité.

Présenté au Séminaire de logique, UQAM, 1er décembre 2005.

Référence : Elliot Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*, 4e édition, §3.3, p. 174-182.

(4) Une fonction f est *récursive* si et seulement si
  (a) il existe une suite finie de fonctions $f_0, \ldots, f_n$ telle que $f_n = f$,
  (b) pour tout $0 \leq i \leq n$, f_i est une fonction initiale ou f_i s'obtient des fonctions f_j $(j < i)$ au moyen des règles de substitution, de récursivité et de l'opérateur μ restreint.

Sur la base de cette définition, il est évident que toute fonction récursive primitive est également récursive.

2. Fonctions récursives primitives

Nous allons maintenant nous donner un certain nombre de fonctions récursives primitives. Pour ce, nous aurons besoin de la proposition ci-dessous qui permet certaines manipulations sur les variables d'une fonction primitive récursive.

Proposition (3.14)**.** [1] *Soit $g(y_1, \ldots, y_k)$ une fonction récursive primitive. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des variables distinctes entre elles. Soit également z_i $(1 \leq i \leq k)$ une des variables $x_1, \ldots, x_n$. La fonction f telle que $f(x_1, \ldots, x_n) = g(z_1, \ldots, z_k)$ est récursive primitive.*

Démonstration. Soit $z_i = x_{j_i}$ tel que $1 \leq j_i \leq n$. Alors, $z_i = U^n_{j_i}(x_1, \ldots, x_n)$. La fonction f s'écrit donc :

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n) &= g(z_1, \ldots, z_k) \\ &= g(U^n_{j_1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, U^n_{j_k}(x_1, \ldots, x_n)) \end{aligned}$$

La fonction f s'obtient des fonctions récursives primitives g et $U^n_{j_1}, \ldots, U^n_{j_k}$ par substitution. Elle est donc elle-même récursive primitive. □

Exemples.

(1) L'ajout de variables vides préserve le caractère récursif primitif d'une fonction. Soient $g(x_1, x_3)$ une fonction récursive primitive et f une fonction telle que $f(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_3)$.

Posons $z_1 = U^3_1(x_1, x_2, x_3), z_2 = U^3_3(x_1, x_2, x_3)$. Alors,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= g(z_1, z_2) \\ &= g(U^3_1(x_1, x_2, x_3), U^3_3(x_1, x_2, x_3)) \end{aligned}$$

Par la proposition (3.14), la fonction f est récursive primitive parce qu'elle s'obtient par substitution des fonctions g et U^3_i qui sont elles-mêmes récursives primitives.

(2) La permutation de variables préserve le caractère récursif primitif d'une fonction. En effet, soient $g(x_1, x_2, x_3)$ une fonction récursive primitive et f une fonction telle que $f(x_1, x_2, x_3) = g(x_3, x_1, x_2)$.

Posons $z_1 = U^3_3(x_1, x_2, x_3), z_2 = U^3_1(x_1, x_2, x_3), z_3 = U^3_2(x_1, x_2, x_3)$. Alors, par la proposition (3.14),

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= g(z_1, z_2, z_3) \\ &= g(U^3_3(x_1, x_2, x_3), U^3_1(x_1, x_2, x_3), U^3_2(x_1, x_2, x_3)) \end{aligned}$$

[1] La numérotation des propositions, corollaires, etc. est différente dans la troisième édition de *Introduction to Mathematical Logic*. La proposition 3.14 de la quatrième édition correspond à la proposition 3.13 de la troisième édition et ainsi de suite.

La fonction f est également récursive primitive parce qu'elle s'obtient de fonctions récursives primitives — g et U_i^3 — en appliquant la règle de substitution.

Corollaire (3.15)**.**

(1) La fonction nulle $Z_n(x_1, \ldots, x_n) = 0$ est récursive primitive

(2) La fonction constante $C_k^n(x_1, \ldots, x_n) = k$ où k est un nombre naturel est récursive primitive.

(3) La règle de substitution peut être généralisée au cas où les fonctions h_i ne dépendent que de certaines des variables $x_i, \ldots, x_n$. Similairement, la règle de récursivité peut être généralisée au cas où les fonctions h_i ne dépendent pas de tous les $x_i, \ldots, x_n, y$ ou $f(x_i, \ldots, x_n, y)$.

Démonstration.

(1) Soit la fonction initiale $Z(x_1) = 0$. Alors, $Z_n(x_1, \ldots, x_n) = Z(x_1)$. Posons $z_1 = U_1^n(x_1, \ldots, x_n)$,

$$\begin{aligned} Z_n(x_1, \ldots, x_n) &= Z(z_1) \\ &= Z_n(U_1^n(x_,1 \ldots, x_n)) \end{aligned}$$

Par la proposition (3.14), cette fonction est récursive primitive.

(2) Par induction :
- k=0 : la fonction $C_0^n(x_1, \ldots, x_n)$ est récursive primitive car il s'agit de la fonction nulle.
- Supposons que C_k^n est une fonction récursive primitive et montrons que C_{k+1}^n est une fonction récursive primitive. Par substitution,

$$C_{k+1}^n(x_1, \ldots, x_n) = N(C_k^n(x_1, \ldots, x_n))$$

(3) Par la proposition (3.14), il suffit d'ajouter les variables manquantes comme variables vides dans les fonctions h_i. □

Proposition (3.16)**.** *Les fonctions suivantes sont récursives primitives :*

(1) $x + y$

(2) $x \cdot y$

(3) x^y

(4) La fonction prédécesseur $\delta(x) = \begin{cases} x - 1 & \textit{si } x > 0 \\ 0 & \textit{si } x = 0 \end{cases}$

(5) $x \dot{-} y = \begin{cases} x - y & \textit{si } x \geq y \\ 0 & \textit{si } x < y \end{cases}$

(6) $|x - y| = \begin{cases} x - y & \textit{si } x \geq y \\ y - x & \textit{si } x < y \end{cases}$

(7) $\mathrm{sg}(x) = \begin{cases} 0 & \textit{si } x = 0 \\ 1 & \textit{si } x \neq 0 \end{cases}$

(8) $\overline{\mathrm{sg}}(x) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x = 0 \\ 0 & \textit{si } x \neq 0 \end{cases}$

(9) $x!$

(10) $\min(x,y) =$ *le minimum de x et y*

(11) $\min(x_1,\dots,x_n) =$ *le minimum de $x_1,\dots,x_n$*

(12) $\max(x,y) =$ *le maximum de x et y*

(13) $\max(x_1,\dots,x_n) =$ *le maximum de $x_1,\dots,x_n$*

(14) $\mathrm{rm}(x,y) =$ *le reste de la division de y par x*

(15) $\mathrm{qt}(x,y) =$ *le quotient de la division de y par x.*

Démonstration. [2]

(1) Par la règle de récursivité avec $f(x,y) = x+y$,

$$\begin{aligned} f(x,0) &= x+0 \\ &= U_1^1(x) \\ f(x,y+1) &= x+(y+1) \\ &= N(f(x,y)) \end{aligned}$$

(2) Par la règle de récursivité et (1) avec $f(x,y) = x\cdot y$,

$$\begin{aligned} f(x,0) &= x\cdot 0 \\ &= Z(x) \\ f(x,y+1) &= x\cdot(y+1) \\ &= f(x,y)+x \end{aligned}$$

(3) Par la règle de récursivité et (2) avec $f(x,y) = x^y$,

$$\begin{aligned} f(x,0) &= x^0 \\ &= C_1^1(x) \\ f(x,y+1) &= x^{y+1} \\ &= x^y\cdot x^1 \\ &= f(x,y)\cdot x \end{aligned}$$

(6) Par la règle de substitution,

$$\begin{aligned} |x-y| &= (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x) \\ &= \begin{cases} (x-y)+0 & \text{si } x \geq y \\ 0+(y-x) & \text{si } x < y \end{cases} \\ &= \begin{cases} x-y & \text{si } x \geq y \\ y-x & \text{si } x < y \end{cases} \end{aligned}$$

[2] Seuls quelques-uns des énoncés seront démontrés. Voir *Introduction to Mathematical Logic*.

(8) Par la règle de substitution,

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{sg}}(x) &= 1 \dot{-} \mathrm{sg}(x) \\
&= \begin{cases} 1 - \mathrm{sg}(x) & \text{si } 1 \geq \mathrm{sg}(x) \\ 0 & \text{si } 1 < \mathrm{sg}(x) \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 - 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 - 1 & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

(12) Par la règle de substitution,

$$\begin{aligned}
\max(x, y) &= y + (x \dot{-} y) \\
&= \begin{cases} y + (x - y) & \text{si } x \geq y \\ y + 0 & \text{si } x < y \end{cases} \\
&= \begin{cases} x & \text{si } x \geq y \\ y & \text{si } x < y \end{cases}
\end{aligned}$$

□

La proposition ci-dessous affirme que la somme et le produit borné de fonctions préservent le caractère récursif primitif des fonctions. Définissons tout d'abord des sommes et produits bornés.

Définition.

$$\sum_{y<z} f(x_1, \ldots, x_n, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } z = 0 \\ f(x_1, \ldots, x_n, 0) + \cdots + f(x_1, \ldots, x_n, z-1) & \text{si } z > 0 \end{cases}$$

$$\sum_{y \leq z} f(x_1, \ldots, x_n, y) = \sum_{y<z+1} f(x_1, \ldots, x_n, y)$$

$$\prod_{y<z} f(x_1, \ldots, x_n, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } z = 0 \\ f(x_1, \ldots, x_n, 0) \cdot \cdots \cdot f(x_1, \ldots, x_n, z-1) & \text{si } z > 0 \end{cases}$$

$$\prod_{y \leq z} f(x_1, \ldots, x_n, y) = \prod_{y<z+1} f(x_1, \ldots, x_n, y)$$

Proposition (3.17)**.** *Soit $f(x_1, \ldots, x_n, y)$ une fonction récursive primitive. Les sommes et produits bornés sur f sont des fonctions récursives primitives.*

Démonstration. Premièrement, soit $g(x_1, \ldots, x_n, z) = \sum_{y<z} f(x_1, \ldots, x_n, y)$. La fonction g est récursive primitive par la règle de récursivité :

$$\begin{aligned}
g(x_1, \ldots, x_n, 0) &= 0 \\
g(x_1, \ldots, x_n, z+1) &= g(x_1, \ldots, x_n, z) + f(x_1, \ldots, x_n, z)
\end{aligned}$$

Deuxièmement, la fonction $h(x_1, \ldots, x_n, z) = \sum_{y \leq z} f(x_1, \ldots, x_n, y)$ est récursive primitive. Par substitution, $h(x_1, \ldots, x_n, z) = g(x_1, \ldots, x_n, z+1)$.

Les produits se démontrent de la même façon. □

La définition précédente et cette proposition peuvent être généralisées aux cas de sommes et produits bornés inférieurement et supérieurement.

Exemple. Soit τ la fonction suivante :

$$\tau(x) = \begin{cases} \text{nombre de diviseurs de } x & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

τ est une fonction récursive primitive. En effet,

$$\tau = \sum_{y \leq x} \overline{\mathrm{sg}}(\mathrm{rm}(y, x))$$

3. Relations récursives primitives

L'objectif de cette section est de démontrer que des relations obtenues à partir de relations récursives primitives sont elles-mêmes récursives primitives. La première étape consiste évidemment à définir ce qu'est une relation récursive primitive. Pour ce, nous aurons besoin des fonctions caractéristiques.

Définition. Soit R une relation à n arguments. La *fonction caractéristique* C_R de R se définit comme suit :

$$C_R(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } R(x_1, \ldots, x_n) \text{ est vrai} \\ 1 & \text{si } R(x_1, \ldots, x_n) \text{ est faux} \end{cases}$$

Définition. Une relation $R(x_1, \ldots, x_n)$ est *récursive primitive* si et seulement si sa fonction caractéristique $C_R(x_1, \ldots, x_n)$ est primitive récursive.

Exemples.

(1) La relation $R(x_1, x_2) : x_1 = x_2$ est récursive primitive. En effet,

$$\begin{aligned} C_R(x_1, x_2) &= \begin{cases} 0 & \text{si } R(x_1, x_2) \text{ est vrai} \\ 1 & \text{si } R(x_1, x_2) \text{ est faux} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 = x_2 \\ 1 & \text{si } x_1 \neq x_2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } |x_1 - x_2| = 0 \\ 1 & \text{si } |x_1 - x_2| \neq 0 \end{cases} \\ &= \mathrm{sg}(|x_1 - x_2|) \end{aligned}$$

Puisque les fonctions $\mathrm{sg}(x)$ et $|x-y|$ sont récursives primitives, la fonction caractéristique C_R est elle-même récursive primitive. La relation R est donc récursive primitive.

(2) La relation $R(x_1, x_2) : x_1 | x_2$ est récursive primitive. En effet,

$$\begin{aligned} C_R(x_1, x_2) &= \begin{cases} 0 & \text{si } R(x_1, x_2) \text{ est vrai} \\ 1 & \text{si } R(x_1, x_2) \text{ est faux} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 | x_2 \\ 1 & \text{si } x_1 \not| x_2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } \operatorname{rm}(x_1, x_2) = 0 \\ 1 & \text{si } \operatorname{rm}(x_1, x_2) \neq 0 \end{cases} \\ &= \operatorname{sg}(\operatorname{rm}(x_1, x_2)) \end{aligned}$$

Les fonctions sg et rm sont récursives primitives. Il en résulte que la fonction caractéristique C_R de la relation R est récursive primitive et que la relation est donc elle-même récursive primitive.

Étant données des relations sur les nombres naturels, nous avons trois façons d'introduire de nouvelles relations.

(1) La première consiste à utiliser les connecteurs propositionnels. Par exemple, étant données des relations $R_1(x_1, \ldots, x_n)$ et $R_2(y_1, \ldots, y_m)$:

(a) $\neg R_1(x_1, \ldots, x_n)$ est une relation qui est vraie pour $x_1, \ldots, x_n$ si et seulement si $R_1(x_1, \ldots, x_n)$ est fausse.

(b) $R_1(x_1, \ldots, x_n) \vee R_2(y_1, \ldots, y_m)$ est une relation qui est vraie pour $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ si et seulement si $R_1(x_1, \ldots, x_n)$ ou $R_2(y_1, \ldots, y_m)$ sont vraies.

(2) La deuxième façon a recours aux *quantificateurs bornés*. Étant donnée une relation $R(x_1, \ldots, x_n, y)$,

(a) $(\forall y)_{y<z} R(x_1, \ldots, x_n, y)$ exprime la relation suivante : pour tout y, si y est plus petit que z, alors $R(x_1, \ldots, x_n, y)$ est vraie.

(b) $(\exists y)_{y<z} R(x_1, \ldots, x_n, y)$ exprime la relation suivante : il existe y tel que si y est plus petit que z, alors $R(x_1, \ldots, x_n, y)$ est vraie.

Les quantificateurs $(\forall y)_{y \leq z}$, $(\exists y)_{y \leq z}$ et les quantificateurs doublement bornés se définissent de la même façon[3].

(3) La troisième façon fait appel à l'*opérateur μ borné* :

$$\mu y_{y<z} R(x_1, \ldots, x_n, y) = \begin{cases} \text{le plus petit } y < z \text{ tel que} & \\ R(x_1, \ldots, x_n, y) \text{ est vrai} & \text{s'il existe un tel } y \\ z & \text{sinon} \end{cases}$$

Similairement, $\mu y_{y \leq z} R(x_1, \ldots, x_n, y) = \mu y_{y<z+1} R(x_1, \ldots, x_n, y)$

Proposition (3.18)**.**

(1) Les relations obtenues de relations primitives récursives à l'aide des connecteurs propositionnels et des quantificateurs bornés sont récursives primitives.

[3] Les résultats subséquents sur les quantificateurs bornés pourront être généralisés aux quantificateurs doublement bornés.

(2) *Les opérateurs μ bornés $\mu y_{y<z}$ et $\mu y_{y\leq z}$ permettent d'obtenir des fonctions récursives primitives à partir de relations récursives primitives.*

Démonstration.

(1) Premièrement, soient $R_1(x_1, \ldots, x_n)$ et $R_2(x_1, \ldots, x_n)$ des relations récur-si-ves primitives. Par définition, leurs fonctions caractéristiques respectives C_{R_1} et C_{R_2} sont récursives primitives. Alors, les relations $\neg R_1$ et $R_1 \vee R_2$ sont récursives primitives. En effet, leurs fonctions caractéristiques respectives sont récursives primitives :

$$\begin{aligned} C_{\neg R_1}(x_1, \ldots, x_n) &= \begin{cases} 0 & \text{si } \neg R_1(x_1, \ldots, x_n) \text{ est vrai} \\ 1 & \text{si } \neg R_1(x_1, \ldots, x_n) \text{ est faux} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } R_1(x_1, \ldots, x_n) \text{ est faux} \\ 1 & \text{si } R_1(x_1, \ldots, x_n) \text{ est vrai} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } C_{R_1}(x_1, \ldots, x_n) = 1 \\ 1 & \text{si } C_{R_1}(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases} \\ &= 1 \dot{-} C_{R_1}(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{R_1 \vee R_2}(x_1, \ldots, x_n) &= \begin{cases} 0 & \text{si } R_1 \vee R_2(x_1, \ldots, x_n) \text{ est vrai} \\ 1 & \text{si } R_1 \vee R_2(x_1, \ldots, x_n) \text{ est faux} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } R_1(x_1, \ldots, x_n) \text{ ou } R_2(x_1, \ldots, x_n) \text{ est vrai} \\ 1 & \text{si } R_1(x_1, \ldots, x_n) \text{ et } R_2(x_1, \ldots, x_n) \text{ sont faux} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } C_{R_1}(x_1, \ldots, x_n) = 0 \text{ ou } C_{R_2}(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ 1 & \text{si } C_{R_1}(x_1, \ldots, x_n) = 1 \text{ et } C_{R_2}(x_1, \ldots, x_n) = 1 \end{cases} \\ &= C_{R_1}(x_1, \ldots, x_2) \cdot C_{R_2}(x_1, \ldots, x_2) \end{aligned}$$

Or, tous les connecteurs propositionnels peuvent être définis en termes de $\neg$ et $\vee$. Toutes les relations obtenues par les connecteurs propositionnels à partir de relations récursives primitives sont donc récursives primitives.

Deuxièmement, soit $R(x_1, \ldots, x_n, y)$ une relation récursive primitive. $(\exists y)_{y<z} R(x_1, \ldots, x_n, y)$ est récursive primitive parce que sa fonction caractéristique est récursive primitive :

$$\begin{aligned} C_{(\exists y)_{y<z} R}(x_1, \ldots, x_n, y) &= \begin{cases} 0 & \text{si } (\exists y)_{y<z} R(x_1, \ldots, x_n, y) \text{ est vrai} \\ 1 & \text{si } (\exists y)_{y<z} R(x_1, \ldots, x_n, y) \text{ est faux} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{s'il existe } y < z \text{ tel que } R(x_1, \ldots, x_n, y) \text{ est vrai} \\ 1 & \text{si pour tout } y < z,\ R(x_1, \ldots, x_n, y) \text{ est faux} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{s'il existe } y < z \text{ tel que } C_R(x_1, \ldots, x_n, y) = 0 \\ 1 & \text{si pour tout } y < z,\ C_R(x_1, \ldots, x_n, y) = 1 \end{cases} \\ &= \prod_{y<z} C_R(x_1, \ldots, x_n, y) \end{aligned}$$

Le quantificateur $(\forall y)_{y<z}$ se définit en termes de $(\exists y)_{y<z}$ et $\neg$. La relation $(\forall y)_{y<z} R(x_1, \ldots, x_n, y)$ est donc récursive primitive. À la lumière de leur

définition, les quantificateurs $(\exists y)_{y\leq z}$ et $(\forall)_{y\leq z}$ déterminent également des relations récursives primitives.

(2) Soit $R(x_1,\ldots,x_n,y)$ une relation récursive primitive. Alors, pour tout y,

$$\prod_{u\leq z} C_R(x_1,\ldots,x_n,u) = \begin{cases} 0 & \text{s'il existe } u\leq y \text{ tel que } C_R(x_1,\ldots,x_n,u)=0 \\ 1 & \text{si pour tout } u\leq y,\ C_R(x_1,\ldots,x_n,u)=1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{s'il existe } u\leq y \text{ tel que } R(x_1,\ldots,x_n,u) \text{ est vrai} \\ 1 & \text{si pour tout } u\leq y,\ R(x_1,\ldots,x_n,u) \text{ est faux} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{y<z}\Big(\prod_{u\leq y} C_R(x_1,\ldots,x_n,u)\Big) &= \prod_{u\leq 0} C_R(x_1,\ldots,x_n,u) + \prod_{u\leq 1} C_R(x_1,\ldots,x_n,u) \\
&\quad + \cdots + \prod_{u\leq z-1} C_R(x_1,\ldots,u) \\
&= [C_R(x_1,\ldots,x_n,0)] \\
&\quad + [C_R(x_1,\ldots,x_n,0)\cdot C_R(x_1,\ldots,x_n,1)] \\
&\quad + \ldots \\
&\quad + [C_R(x_1,\ldots,x_n,0)+\cdots+C_R(x_1,\ldots,x_n,z-1)] \\
&= \begin{cases} \overbrace{[1]+[1\cdot 1]+\ldots}^{y} & \\ +[1\cdot\cdots\cdot 1\cdot 0]+\cdots+[0] & \text{s'il existe un } y \text{ tel que} \\ & R(x_1,\ldots,x_n,y)\text{est vrai} \\ \overbrace{1+\cdots+1}^{z} & \text{si pour tout } y<z, \\ & R(x_1,\ldots,x_n,y) \text{ est faux} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \text{le plus petit } y<z \text{ tel que} & \\ R(x_1,\ldots,x_n,y) \text{ est vrai} & \text{s'il existe un tel } y \\ z & \text{sinon} \end{cases} \\
&= \mu y_{y<z} R(x_1,\ldots,x_n,y)
\end{aligned}$$

Or, ceci est une fonction récursive primitive parce que les sommes et produits bornés de fonctions récursives primitives sont eux-mêmes des fonctions récursives primitives par la proposition (3.17). □