Déf ^{n} :

Un ordre est dit *total* s'il est un ordre partiel satisfaisant une relation d'ordre R telle que pour $\forall x$ et $\forall y$ on a *xRy* ou *yRx*.

<u>Théorème :</u>

$\leq$ **est un ordre total.**

$Ayant\ déjà\ montré\ que \leq est\ un\ ordre\ partiel,\ il\ faut\ démontrer\ la\ propriété\ suivante$:

$Pour\ \forall x\ et\ \forall y,\ x \leq y\ ou\ y \leq x.$

$On\ veut\ montrer\ que\ x \cdot y = x\ ou\ y \cdot x = y\ pour\ \forall x\ et\ \forall y.$

$En\ 4\ cas,$

1) $Soit\ x = 0\ et\ y = 0$, $x \cdot y = 0 \cdot 0 = 0 = x = y.$

2) $Soit\ x = 0\ et\ y = 1$, $x \cdot y = 0 \cdot 1 = 0 = x.$

3) $Soit\ x = 1\ et\ y = 0$, $y \cdot x = 0 \cdot 1 = 0 = y.$

4) $Soit\ x = 1\ et\ y = 1$, $x \cdot y = 1 \cdot 1 = 1 = x = y.$ ■

Ex : Un ensemble *P(X)* et la relation d'inclusion $\subseteq$ forment un ordre partiel, mais non total.

Soit A, B et $C \in P(X)$, on a :

1) $A \subseteq A$
2) Si $A \subseteq B$ et $B \subseteq C$, alors $A \subseteq C$.
3) Si $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$, alors $A = B$.

Par contre, il est contingent que soit $A \subseteq B$ ou $B \subseteq A$. Par exemple, ces deux sous-ensembles peuvent être disjoints.

Ex : $\mathbb{N}^*$ et l'opérateur | (divise) forment un ordre partiel.

Soit x, y et z $\in \mathbb{N}^*$, on a

1) x | x
2) Si x | y et y | z, alors x | z.
3) Si x | y et y | x, alors x = y.

Par contre, il est contingent que soit x | y ou y | x. Par exemple, x et y peuvent être deux nombre premiers.

Déf ^{ns} :

Soit *A* un ensemble partiellement ordonné et un ensemble $S \subseteq A$.
Un *majorant* de *S* est un $a \in A$ tel que $s \leq a$ pour $\forall s \in S$.
Un *minorant* de *S* est un $b \in A$ tel que $s \geq b$ pour $\forall s \in S$.
Un *suprémum* est le plus petit majorant.
Un *infimum* est le plus grand minorant.

Formellement :
Soit $\langle A, \leq \rangle$ un ensemble partiellement ordonné et un sous-ensemble arbitraire S. Nous dirons qu'un élément $a \in A$ est un *suprémum* de S , i.e. $a = \bigvee S$ si :

i) $s \leq a, \forall s \in S.$
ii) $Si\ s \leq b\ pour\ \forall s \in S,\ alors\ a \leq b.$

Si *S* =*{s, t},* $\bigvee\{s,t\} = s \vee t.$
Si *S* =$\varnothing$, $\bigvee\varnothing$ est le plus petit élément de A, i.e. $0(\perp)$.

Soit *A* =*P(X)* où *X* est un ensemble arbitraire et $\langle P(X), \subseteq \rangle$ un ensemble partiellement ordonné. Si une famille de sous-ensembles *S* est telle que *S*$\subseteq$*P(X),* alors :
$\bigvee S =_{déf^n} \{x \in X : \exists Y \in S,\ x \in Y\}$

De façon duale :
Soit *A* un ensemble partiellement ordonné et *S*$\subseteq$*A*. Nous dirons qu'un élément $a \in A$ est un infimum de *S*, $a = \bigwedge S$, si :

i) $a \leq s\ pour \forall s \in S.$
ii) $Si\ b \leq s\ pour \forall s \in S, b \leq a.$

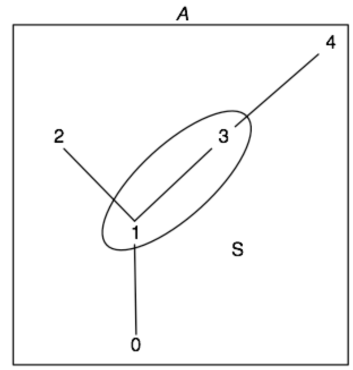
Si *S* =*{s, t},* $\bigwedge\{s,t\} = s \wedge t.$
Si *S* =$\varnothing$, $\bigwedge\varnothing$ est le plus grand élément de *A*, i.e. $1(\top)$.

Si $A = \langle P(X), \subseteq \rangle\ et\ S \subseteq P(X)$, alors $\bigwedge S =_{déf^n} \{x \in X : \forall Y \in S,\ x \in Y\}$

NB : Si $\bigvee S$ existe, il est unique; de même si $\bigwedge S$ existe, il est unique. (anti-symétrie)

Ex :

Soit un ensemble A :{0, 1, 2, 3, 4} et un sous-ensemble S:{1, 3} ordonnés comme à la figure ci-contre.
{3, 4} constituent les *majorants* de S.
{3} est le *suprémum* de S.
{0,1} constituent les *minorants* de S.
{1} est l'*infimum* de S.



Cet ensemble A est partiellement ordonné :

-Chaque élément est $\leq$ à lui-même. (réflexivité)
-On a également la transitivité (si $0 \leq 1$ et $1 \leq 2$, alors $0 \leq 2$ par exemple).
-Anti-symétrie : si $0 \leq 1$ et $1 \leq 0$, alors 0 = 1.
-Mais par contre, on ne peut satisfaire la propriété d'ordre total, par exemple il est faux que soit $2 \leq 3$ ou $3 \leq 2$, car ces deux éléments sont incomparables.

Déf ^{n} :

Un *demi-treillis* est un ensemble partiellement ordonné A dont chaque sous-ensemble possède un suprémum ou un infimum dans A.

Algébriquement,
Un *demi-treillis* est un ensemble A muni d'un certain opérateur $\oplus$ et d'un certain élément neutre N tels que :
Soit a, b et $c \in A$

1) $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$ *(Associativité)*
2) $a \oplus \eta = a$ *(Élément neutre)*
3) $a \oplus b = b \oplus a$ *(Commutativité)*
4) $a \oplus a = a$ *(Idempotence)*

Déf ^{n} :

Soit $\langle A, \leq \rangle$ un ensemble partiellement ordonné tel que $\forall S \subseteq A$ et $\bigvee S$ existe. On appelle un tel ensemble un *treillis complet*.

Dans un treillis complet, si $\bigvee S$ existe, alors $\bigwedge S$ existe aussi. Définissons :

$$B = \{a \in A : a \leq s, \forall s \in S\}$$
$$\bigwedge S = \bigvee B$$

NB : Si on prend $\langle A, \leq \rangle$ un ensemble partiellement ordonné tel que pour $\forall S \subseteq A$ fini et que $\bigvee S$ existe, il ne s'ensuit pas nécessairement que $\bigwedge S$ existe.

Exercice : Montrer que dans ce cas, on a un problème de définition de l'inf par le sup.

Déf^n :

Un *treillis* est un ensemble partiellement ordonné $\langle A, \leq \rangle$ dans lequel tout sous-ensemble <u>fini</u> $S \subseteq A$ a un sup <u>et</u> un inf dans A. Donc $0, 1, \vee$ *et* $\wedge$ existent.

Du point de vue algébrique nous avons $\langle A, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ qui satisfait un certain nombre d'équations :

1. $a \wedge b = b \wedge a \quad et \quad a \vee b = b \vee a.$ (commutativité)
2. $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) \quad et \quad (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c).$ (associativité)
3. $a \wedge a = a \quad et \quad a \vee a = a.$ (idempotence)
4. $a \wedge 1 = a, a \vee 1 = 1 \quad et \quad a \wedge 0 = 0, a \vee 0 = a.$
5. $a \wedge (a \vee b) = a \quad et \quad a \vee (a \wedge b) = a.$ (absorption)

Ex :

Soit une structure $\langle A, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ telle que $\wedge : \mathrm{A} \times \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{A}$ et $\vee : \mathrm{A} \times \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{A}$ qui vérifie les équations 1 à 5. Montrer qu'il y a un unique ordre partiel définissable sur A tel que $\langle A, \leq \rangle$ est un treillis et que les opérations $\wedge, \vee, 0, 1$ données algébriquement sont les opérations du treillis.

Soit a, b et $c \in A.$

$a \leq b$ ssi $a \wedge b = a$ ou encore $a \leq b$ ssi $a \vee b = b.$

Nous sommes en présence d'un ordre partiel :

Pour $\forall a,$ on a $a \leq a,$ i.e. $a \wedge a = a.$ (Réflexivité)

Pour $\forall a, \forall b$ et $\forall c,$ si on a $a \leq b$ et $b \leq c,$ alors $a \leq c.$

i.e. si $a \wedge b = a$ et $b \wedge c = b,$ alors $a \wedge c = a.$ (Transitivité)

Pour $\forall a$ et $\forall b,$ si $a \leq b$ et $b \leq a,$ alors $a = b.$

i.e. si $a \wedge b = a$ et $b \wedge a = b,$ alors $a = b.$ (Anti-symétrie)

(les mêmes propriétés se démontrent en définissant l'ordre par $a \leq b$ ssi $a \vee b = b$)

Redéfinissons l'infimum et le suprémum:

Soit a, b et $c \in A.$

$a = \bigvee A$ si :

i) $b \leq a, \forall b \in A,$ i.e. $b \vee a = a$ pour $\forall b \in A.$

ii) Si $b \leq c$ pour $\forall b \in A,$ alors $a = c,$ i.e. si $b \wedge c = b$ pour $\forall b \in A,$ alors $a = c.$

$a = \bigwedge A$ si :

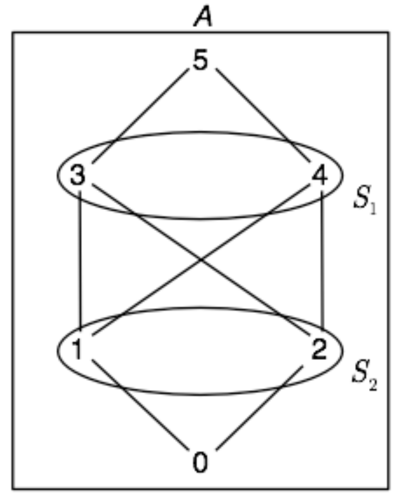
i) $a \leq b, \forall b \in A,$ i.e. $a \wedge b = a$ pour $\forall b \in A.$

ii) Si $c \leq b$ pour $\forall b \in A,$ alors $c = a,$ i.e. si $c \wedge b = c$ pour $\forall b \in A,$ alors $a = c.$

Ex :

Soit la structure définie ci-contre. Le sous-ensemble S_1:{3, 4} n'a pas d'infimum dans *A* car 3 et 4 sont incomparables entre eux et leurs plus grands minorants, soit le sous-ensemble S_2:{1, 2}, sont également incomparables entre eux.

On ne peut satisfaire la propriété d'unicité de l'infimum.



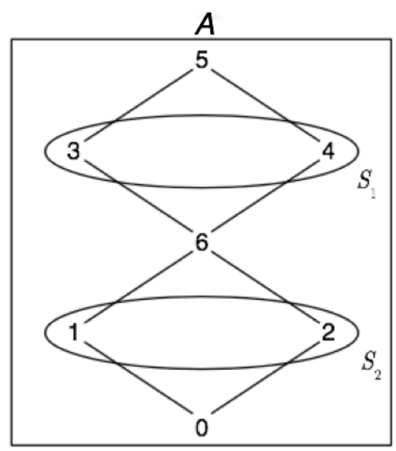
De même, le sous-ensemble S_2:{1, 2} n'a pas de suprémum dans *A* car 1 et 2 sont incomparables entre eux et leurs plus petits majorant, soit le sous-ensemble S_1:{3,4}, sont incomparables entre eux.

On ne peut satisfaire la propriété d'unicité du suprémum.

Ainsi, cet exemple ne constitue pas un treillis.

Ex :

Soit la structure ci-contre. Les deux sous-ensembles pouvant être problématiques de l'exemple ci-contre sont S_1 et S_2 car leurs éléments sont incomparables entre eux. Les autres cas en dérive ou sont triviaux.



Le sous-ensemble S_1:{3, 4} possède un suprémum et un infimum dans *A*. $\vee S_1$ = {5} et $\wedge S_1$ = {6}

Le sous-ensemble S_2:{1, 2} possède un suprémum et un infimum dans *A*. $\vee S_2$ = {6} et $\wedge S_2$ = {0}

Il s'agit donc d'un treillis.

Ex :

Soit $(\mathbb{N}, \leq)$, si on ajoute ∞ tel que n $<\infty$ pour $\forall n \in \mathbb{N}$, nous sommes alors en présence d'un treillis.

Ex :
$(P(X), \subseteq)$ est un treillis complet.

Soit un ensemble arbitraire $S = \{S_1, S_2, ..., S_i, ...\}$ tel que $S \subseteq P(X)$ et $S_i \in X$.

$\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i = \{x \in X : \exists S_j (x \in S_j)\} \in P(X)$

Dans $(P(X), \subseteq)$, il y a une opération additionnelle $\neg : P(X) \to P(X)$ définie par :

$\neg S = X - S$ $\qquad\qquad$ (*complément*)

$\neg S = \{x \in X : \neg(x \in S)\}$

Dans ce cas, le complément de S, $\neg S$, satisfait $S \wedge \neg S = 0$ et $S \vee \neg S = 1$.

Déf^n :
Soit $\langle A, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ un treillis, b est un *complément* de a si $a \wedge b = 0$ et $a \vee b = 1$.

Remarque : En général, le complément d'un élément donné n'existe pas, et lorsqu'il existe, il n'est pas toujours unique.

Déf^n :
Un treillis $\langle A, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ est distributif s'il satisfait :

$$(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$$

<u>*Lemme* :</u>
On peut montrer $(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$ **:**

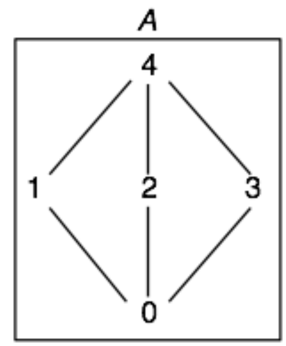
$$\begin{aligned}
(a \vee c) \wedge (b \vee c) &= (a \wedge (b \vee c)) \vee (c \wedge (b \vee c)) && (\textit{distrbutivité}) \\
&= (a \wedge (b \vee c)) \vee c && (\textit{absortion}) \\
&= ((a \wedge b) \vee (a \wedge c)) \vee c && (\textit{distributivité et associativité}) \\
&= (a \wedge b) \vee ((a \wedge c) \vee c) && (\textit{associativité}) \\
&= (a \wedge b) \vee c && (\textit{absorption})
\end{aligned}$$

Ex :
Soit a, b *et* $c \in A$ où $\langle A, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ est un treillis distrbutif.
Définissons $a \vee b$ = max(a, b) et $a \wedge b$ = min(a, b). Alors:

max(a, min(b, c)) = min(max(a, b), max(a, c))

et inversement,
min(a, max(b, c)) = max(min(a, b), min(a, c))

Ex:
Cet ensemble est un treillis, mais il n'est pas distributif.
Il est un treillis parce que chaque sous-ensemble possède un infimum et un suprémum dans *A*.
Dans un treillis distributif, on a
$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$, mais dans le cas illustré :
$1 \vee (2 \wedge 3) = 1 \vee 0 = 1$
$(1 \vee 2) \wedge (1 \vee 3) = 4 \vee 4 = 4$
$mais\ 1 \neq 4,\ ainsi\ 1 \vee (2 \wedge 3) \neq (1 \vee 2) \wedge (1 \vee 3)$



Théorème :
Dans un treillis distributif $\langle A, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$, les éléments ont au plus un complément.

Preuve :

$$b = b \wedge 1 = b \wedge (c \vee a) = (b \wedge c) \vee (b \wedge a) = (b \wedge c) \vee 0 = b \wedge c$$

$$\Updownarrow$$

$$c = c \wedge 1 = c \wedge (b \vee a) = (c \wedge b) \vee (c \wedge a) = (c \wedge b) \vee 0 = c \wedge b$$

Déf^{ns} :

1. Soit $\langle A, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ un treillis distributif dans lequel tout élément a un complément, une telle structure est appelée une *algèbre de Boole*.

2. Soit $\langle A, \leq\rangle$ un ensemble partiellement ordonné, le *dual* de *A*, A^{op}, est l'ensemble partiellement ordonné défini par $\langle A, \leq^{op}\rangle$ où $a \leq^{op} b$ ssi $b \leq a$ dans A.

   Soit a, b et $c \in A^{op}$.
   $a \leq^{op} b$ ssi $b \leq a$ dans A et donc $a \wedge b = b$.
   Pour $\forall a$, on a $a \leq^{op} a$, i.e. $a \wedge a = a$. (Réflexivité)
   Pour $\forall a$, $\forall b$ et $\forall c$, si on a $a \leq^{op} b$ et $b \leq^{op} c$, alors $a \leq^{op} c$.
   i.e. si $a \wedge b = b$ et $b \wedge c = c$, alors $a \wedge c = c$. (Transitivité)
   Pour $\forall a$ et $\forall b$, si $a \leq^{op} b$ et $b \leq^{op} a$, alors $a = b$.
   i.e. si $a \wedge b = b$ et $b \wedge a = a$, alors $a = b$. (Anti-symétrie)

Faits :

- Si $\langle A, \leq\rangle$ est un treillis, alors A^{op} l'est aussi.
- Si $\langle A, \leq\rangle$ est un treillis distributif, alors A^{op} l'est aussi.
- Si $\langle A, \leq\rangle$ est une algèbre de Boole, alors A^{op} l'est aussi.

Algèbres de Boole :

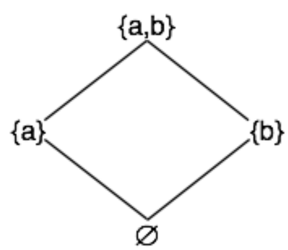
Une algèbre de Boole est un treillis distributif complémenté.
On définit l'opération $\neg$:

$$\neg a \wedge a = 0$$
$$\neg a \vee a = 1$$
$$\neg\neg a = a$$
$$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$$
$$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$$

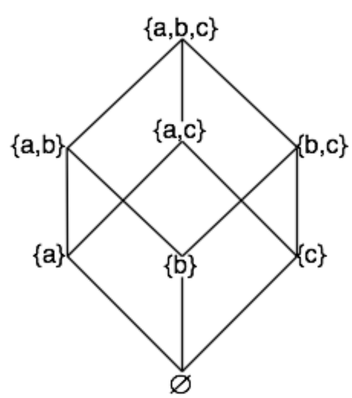
Ex :

Soit X = {a}
On a une algèbre de Boole à 2 éléments.

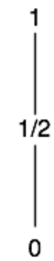
Soit X = {a, b}
On a une algèbre de Boole à 4 éléments.



Soit X = {a, b, c}
On a une algèbre de Boole à 8 éléments.



Ex :
La figure ci-contre ne constitue pas une algèbre de Boole.



$a \wedge b = \min(a, b)$
$a \vee b = \max(a, b)$
$x \wedge 1/2 = 0$ et donc $\min(x, 1/2) = 0$, alors $x = 0$.
$x \vee 1/2 = 1$ et donc $\max(x, 1/2) = 1$, alors $x = 1$.

Déf^{ns} :

1. Un *homomorphisme de treillis* A : $\langle A, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ et B : $\langle B, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ est une fonction $f: A \to B$ qui précise les opérations :

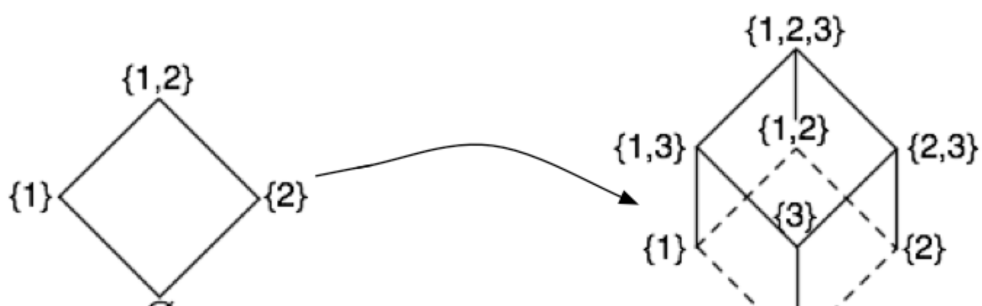
$$f(a \wedge_A b) = f(a) \wedge_B f(b)$$
$$f(a \vee_A b) = f(a) \vee_B f(b)$$
$$f(0_A) = 0_B$$
$$f(1_A) = 1_B$$

2. Un *plongement de treillis* est un homomorphisme injectif.

3. Un *isomorphisme de treillis* est un homomorphisme bijectif.

4. Un *homomorphisme d'algèbre de Boole* est un homomorphisme de treillis qui précise le complément : $f(\neg a) = \neg f(a)$.

Ex:
Soit $A = \{0, 1\}$ et $B = \{0, 1, 2\}$.
$P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
$P(B) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$



Un plongement $P(A) \to P(B)$

Faits:

- Tout homomorphisme de treillis préserve l'ordre partiel: $a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$.
- Soit A *et* B des treillis et $f:(A,\leq) \to (B,\leq)$ un isomophisme d'ensembles partiellement ordonnés:
  $a \leq b \Leftrightarrow f(a) \leq f(b)$ et *f* une injection, *f* est un isomorphisme de treillis.
- Soit A *et* B des treillis et $f: A \to B$ un homomorphisme d'ensembles partiellement ordonnés, f n'est pas nécessairement un homomorphisme de treillis.

Algèbres de Heyting :

Par relation d'ordre,
une *algèbre de Heyting* est un treillis dont chaque paire d'élément (a, b) admet un élément unique ($a \to b$) tel que :

$c \leq (a \to b)$ ssi $c \wedge a \leq b$ ou

$(a \to b)$ est le plus grand élément satisfaisant $(a \to b) \wedge a \leq b$

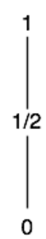
De façon algébrique,
une *algèbre de Heyting* est un treillis A muni d'une opération $\to$ telle que :

1) $a \to a = 1$
2) $a \wedge (a \to b) = a \wedge b$
3) $b \wedge (a \to b) = b$
4) $a \to (b \wedge c) = (a \to b) \wedge (a \to c)$

Ex :

$$a \to b \begin{cases} 1 \text{ si } a \leq b \\ b \text{ sinon} \end{cases}$$

	0	1/2	1
0	1	1	1
1/2	0	1	1
1	1	1/2	1



Déf ^{n} :

Soit $\neg a = a \to 0 = (\neg a \vee 0) = \neg a$, dans une algèbre de Heyting, on définit $\neg a = a \to 0$ comme étant le *pseudo-complément* de *a.*

$$\begin{pmatrix} a \wedge \neg a = 0 & \\ a \vee \neg a = 1 & \Rightarrow \text{Pas nécessairement vrai dans le cas général} \end{pmatrix}$$

Ex :
L'ensemble *A* des parties finies de *X* d'un ensemble infini *X*.
A est un sous-treillis de *P(X)*. (à démontrer)
A n'est pas une algèbre de Heyting.

$S \subseteq X$ $(S \in A$ *fini et* $S \neq \varnothing)$

$\neg S = S \rightarrow \varnothing$

$c \subseteq X$ (des précisions seront à apporter…)

$S \cap c = \varnothing$

Faits:

- Toute algèbre de Heyting est un treillis distributif.
  $(a \vee b) \wedge c \leq z$ ssi $(a \vee b) \leq c \rightarrow z$
  ssi $a \leq c \rightarrow z$ et $b \leq c \rightarrow z$
  ssi $a \wedge c \leq z$ et $b \wedge c \leq z$
  ssi $(a \wedge c) \vee (b \wedge c) \leq z$

  Puisque *z* est arbitraire, on prend respectivement:
  $z = (a \vee b) \wedge c$
  $z = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$

- Une *algèbre de Boole* est toujours une *algèbre de Heyting :*

  $c \wedge a \leq b \Leftrightarrow c \leq a \rightarrow b$
  $\Leftrightarrow c \leq \neg a \vee b$ (pour algèbre de Boole)

  Dans le sens $\Rightarrow$,
  $c \wedge a \leq b$ (hypothèse)
  $c \wedge a \leq b \wedge a$ (car $c \wedge a \leq a$)
  $c \wedge a \leq 0 \vee (b \wedge a)$
  $c \wedge a \leq (\neg a \wedge a) \vee (b \wedge a)$
  $c \wedge a \leq (\neg a \vee b) \wedge a$
  $c \leq \neg a \vee b$

  Dans le sens $\Leftarrow$,
  $c \leq \neg a \vee b$ (hypothèse)
  $c \wedge a \leq (\neg a \vee b) \wedge a$
  $c \wedge a \leq (\neg a \wedge a) \vee (b \wedge a)$
  $c \wedge a \leq 0 \vee (b \wedge a)$
  $c \wedge a \leq b \wedge a$
  $c \wedge a \leq b$ (car $b \wedge a \leq b$)

- Soit A un treillis complet. A est une algèbre de Heyting ssi elle satisfait la distributivité infinie:
  $a \wedge (\bigvee_{i=1}^{\infty} b_i) = \bigvee_{i=1}^{\infty} (a \wedge b_i)$

  La preuve se fait de la même façon que la preuve qu'une algèbre de Heyting satisfait la distributivité finie en remplaçant toutefois le sup fini par un sup arbitraire. (À faire en exercice)

Supposons que A est un treillis complet satisfaisant la distributivité infinie.
Soit $(a,b) \in A$. Définissons:

$$a \to b = \bigvee_{x \wedge a \leq b} x = \bigvee \{x : x \wedge a \leq b\}$$

De telle sorte que si $y \wedge a \leq b$, alors nous aurons $y \leq \bigvee \{x : x \wedge a \leq b\} = a \to b$.

Réciproquement, si $y \leq a \to b$, alors $y \wedge a \leq \underbrace{\left(\bigvee_{x \wedge a \leq b} x\right) \wedge a \leq \bigvee_{x \wedge a \leq b} (x \wedge a)}_{distributivit\acute{e}} \leq \bigvee b = b$.

Remarque: L'algèbre des sous-ensembles ouverts d'un espace topologique X est une algèbre de Heyting.

Objectif: Montrer qu'il est possible de construire un treillis distributif (respectivement une algèbre de Heyting et une algèbre de Boole) à partir d'une théorie cohérente (respectivement théorie intuitionniste et théorie classique).

Quelques résultats préliminaires:

$$\frac{A \to B \vdash A \to B}{(A \to B) \wedge A \vdash B} \text{ Règle d'algèbre de Heyting}$$

Aussi:

$$\frac{\dfrac{\top \vdash A \to B \qquad \top \vdash A}{\top \vdash (A \to B) \wedge A} \qquad \dfrac{(A \to B) \vdash (A \to B)}{(A \to B) \wedge A \vdash B}}{\top \vdash B} \qquad \text{(Modus ponen)}$$

Également:

$$\frac{A \wedge B \vdash A \wedge B}{A \wedge B \vdash A} \qquad \frac{A \wedge B \vdash A \wedge B}{A \wedge B \vdash B}$$

en particulier: $A \vdash \top \wedge A$ et $\top \wedge A \vdash A$

Donc:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\top\wedge(A\wedge B)\vdash\top\wedge(A\wedge B)}{\top\wedge(A\wedge B)\vdash A\wedge B}\qquad\dfrac{A\wedge B\vdash A\wedge B}{A\wedge B\vdash A}}{\top\wedge(A\wedge B)\vdash A}}{\top\vdash(A\wedge B)\to A}$$

$$\dfrac{\dfrac{\top\wedge A\vdash\top\wedge A}{\top\wedge A\vdash A}}{\top\vdash A\to A}\qquad\qquad\begin{array}{c} A\wedge \mathrm{B}\vdash A\wedge B \\ \hline A\wedge \mathrm{B}\vdash A \\ \hline A\vdash B\to A \\ \hline \top\wedge A\vdash B\to A \\ \hline \top\vdash A\to(B\to A)\end{array}$$

<u>Lemme</u>:

1. $A\to(B\wedge C)\vdash(A\to B)\wedge(A\to C)$
   $(A\to B)\wedge(A\to C)\vdash A\to(B\wedge C)$

2. $A\vdash B\;\Rightarrow\;(C\to A)\vdash(C\to B)$

Alors:

$$\begin{array}{cl} B\to C\vdash B\to C & \\ \hline (B\to C)\wedge B\vdash C & \\ \hline A\to(B\to C)\wedge B\vdash A\to C & \mathit{Lemme}2 \\ \hline (A\to(B\to C)\wedge(A\to B)\vdash A\to C & \mathit{Lemme}1 \\ \hline (A\to(B\to C))\wedge(A\to B)\vdash A\to C & \\ \hline \top\wedge(A\to(B\to C))\vdash(A\to B)\to(A\to C) & \\ \hline \top\vdash(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C)) & \end{array}$$

Lemme 1
(1[ière] partie) : $A\to(B\wedge C)\vdash(A\to B)\wedge(A\to C)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\to(B\wedge C)\vdash A\to(B\wedge C)}{A\to(B\wedge C)\wedge A\vdash B\wedge C}\qquad\dfrac{B\wedge C\vdash B\wedge C}{B\wedge C\vdash B}}{A\to(B\wedge C)\wedge A\vdash B}}{A\to(B\wedge C)\vdash(A\to B)}\qquad\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\to(B\wedge C)\vdash A\to(B\wedge C)}{A\to(B\wedge C)\wedge A\vdash B\wedge C}\qquad\dfrac{B\wedge C\vdash B\wedge C}{B\wedge C\vdash C}}{A\to(B\wedge C)\wedge A\vdash C}}{A\to(B\wedge C)\vdash(A\to C)}}{A\to(B\wedge C)\vdash(A\to B)\wedge(A\to C)}$$

Lemme 1
(2ième partie) : $(A \to B) \wedge (A \to C) \vdash A \to (B \wedge C)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(A \to B) \wedge (A \to C) \vdash (A \to B) \wedge (A \to C)}{(A \to B) \wedge (A \to C) \vdash A \to B}}{(A \to B) \wedge (A \to C) \wedge A \vdash B} \qquad \dfrac{\dfrac{(A \to B) \wedge (A \to C) \vdash (A \to B) \wedge (A \to C)}{(A \to B) \wedge (A \to C) \vdash A \to C}}{(A \to B) \wedge (A \to C) \wedge A \vdash C}}{\dfrac{(A \to B) \wedge (A \to C) \wedge A \vdash B \wedge C}{(A \to B) \wedge (A \to C) \vdash A \to (B \wedge C)}}$$

Lemme 2 : $A \vdash B \Rightarrow (C \to A) \vdash (C \to B)$

$$\dfrac{\dfrac{(C \to A) \vdash (C \to A)}{(C \to A) \wedge C \vdash A} \qquad \mathrm{A} \vdash \mathrm{B}\ (\textit{hypothèse})}{\dfrac{(C \to A) \wedge C \vdash B}{C \to A \vdash C \to B}}$$