Soit T une théorie dans une logique L propositionnelle (cohérente, intuitionniste, classique). Nous pouvons définir :

$A \leq B$ si $A \vdash B$.

On vérifie directement que nous avons un pré-ordre. Par les règles structurales :

$A \vdash A$ (Réflexivité)

$$\frac{A \vdash B \quad B \vdash C}{A \vdash C} \qquad \text{(Transitivité)}$$

Par contre, il manque l'anti-symétrie, i.e.

$$A \vdash B \text{ et } B \vdash A \Rightarrow \underbrace{A = B}_{\text{problème}}$$

Pour obtenir un ordre partiel, on défini une relation d'équivalence:

$A \sim_T B$ si $A \dashv\vdash B$ ($T \vdash$:A $\vdash B$)

$$[A] = \{B : A \vdash B \text{ et } B \vdash A\}$$

Nous pouvons définir une relation d'ordre partiel:

$[A] \leq [B]$ si $A \vdash B$

Vérifier que la relation est bien définie, i.e.:

si $A \vdash B$ et $[A] = [A']$, alors $A' \vdash B$
et si $A \vdash B$ et $[B] = [B']$, alors $A \vdash B'$.

On a l'anti-symétrie:

$[A] \leq [B]$ et $[B] \leq [A] \Rightarrow [A] = [B]$
(On a alors un ordre partiel)

Nous posons:

$1 = [\top]$
$0 = [\bot]$
$[A] \wedge [B] = [A \wedge B]$
$[A] \vee [B] = [A \vee B]$
($[\ \ ]$ est une classe d'équivalence)

Pour une algèbre de Heyting: $[A] \to [B] = [A \to B]$

On vérifie que si T est une théorie dans une logique cohérente $([T], 0, 1, \wedge, \vee)$, c'est un treillis distributif.
Par exemple,

1) Puisque nous avons $\mathrm{A} \vdash \top$, nous obtenons immédiatement $[\mathrm{A}] \leq [\top] = 1$.

2) Puisque nous avons $\dfrac{A \vdash B \quad B \vdash C}{A \vdash B \wedge C}$

$$[A] \leq [B] \text{ et } [B] \leq [C] \text{ ssi } [\mathrm{A}] \leq [B \wedge C]$$

Notation: la ligne double indique qu'on peut aller dans les deux sens

NB: On peut définir un modèle générique d'une théorie T donnée de la manière suivante:

Soit L le langage de la théorie, on pose:

$$\begin{aligned} M : L &\to [T] \quad \text{(ce modèle a des propriétés singulières et importantes)} \\ A &\mapsto [A] \end{aligned}$$

Idéaux et filtres:

Déf^{n} :

Soit A un treillis. Un *idéal* I de A est $I \subseteq A$ et $I \neq \varnothing$ tel que:

i) Si $a, b \in I$, alors $a \vee b \in I. (\bigvee(a,b))$

ii) Si $a \in A, b \in I$ et $a \leq b$, alors $a \in I$.

NB: 0 est toujours dans un idéal.

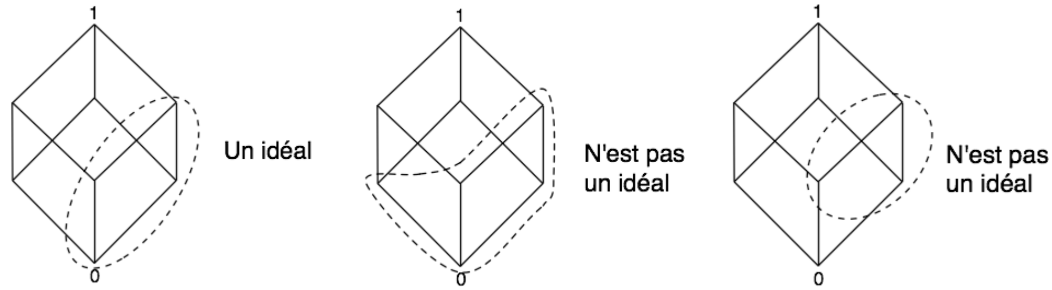
La notion duale:
Soit A un treillis. Un *filtre* F de A est $F \subseteq A$ et $F \neq \varnothing$ tel que:

i) Si $a, b \in I$, alors $a \wedge b \in I. (\bigwedge(a,b))$

ii) Si $a \in A, b \in F$ et $b \leq a$, alors $a \in F$.

NB: 1 est toujours dans un filtre.

Ex:



Ex:
Soit X un ensemble. $\left(P(X),\subseteq\right)$
Soit $I_x = \left\{Y \subseteq X : x \notin Y \text{ pour un élément } x \in X\right\}$.
I_x est un idéal. Manifestement $I_x \neq \varnothing$ puisque $\varnothing \in I_x$.

i) Si $Y_1 \in I_x$ et $Y_2 \in I_x$, alors $Y_1 \cup Y_2 \in I_x$.
Si $x \notin Y_1$ et $x \notin Y_2$, alors $x \notin Y_1 \cup Y_2$.

ii) Soit $Y \subseteq X$, $Y_1 \in I$ et $Y \subseteq Y_1$. Puisque $x \notin Y$ et $Y \subseteq Y_1$, $x \notin Y_1$.

Ex:
Soit X un ensemble. $\left(P(X),\subseteq\right)$

$I_{fin} = \left\{Y \subseteq X : \|Y\| \text{ est fini}\right\}$ À vérifier!

Nous avons le treillis distributif **2** = {0,1} où 0 < 1.
Soit A un treillis et $f : A \to 2$ une fonction.
Le sous-ensemble $f^{-1}(1) \subseteq A, f^{-1} = \left\{a \in A : f(a) = 1\right\}$ est un filtre ssi f préserve l'ordre.

$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$ et $f(1) = 1$

Preuve:

1) Si $a \in f^{-1}(1)$ et $b \in f^{-1}(1)$, alors $a \wedge b \in f^{-1}(1)$.
Par définition de $f^{-1}(1)$,
$f(a) = 1$, $f(b) = 1$, donc $f(a) \wedge f(b) = 1 \wedge 1 = 1 = f(a \wedge b)$. (par hypothèse)

2) $a \in A$, $b \in f^{-1}(1)$ et $b \leq a$. Nous voulons montrer que $a \in f^{-1}(1)$.
$f(b) = 1$ par hypothèse,
$b \leq a \Rightarrow f(b) \leq f(a)$ par hypothèse
$\Rightarrow 1 \leq f(a)$
$\Rightarrow 1 = f(a)$

L'autre direction est à démontrer.

NB: $f^{-1}(0)$ est un idéal (pour les propriétés duales).

Ex:
Soit *A* un treillis. Les sous-ensemble de *A*

$\downarrow(a) = \{b \in A \mid b \leq a\}$ est un idéal de *A*.
C'est le plus petit idéal qui contient *a* (à démontrer)

Un idéal qui satisfait cette définition est appellé un *idéal principal.*

La notion duale est celle d'un filtre principal:
$\uparrow(a) = \{b \in A \mid a \leq b\}$

Théorème:

Soit *I* un idéal d'un treillis *A*. Les conditions suivantes sont équivalentes:

i) Le complément de *I* dans *A* est un filtre;

ii) $1 \notin I$ et si $a \wedge b \in I \Rightarrow a \in I$ ou $b \in I$;

iii) *I* est de la forme $f^{-1}(0)$ pour un $f : A \to 2$ et *f* est un homomorphisme de treillis.

Preuve:
$i) \to ii)$

Soit *F* le complément de *I*. Puisque *F* est, par hypothèse, un filtre, $1 \in F$ et donc $1 \notin I$. Supposons que $a \wedge b \in I$, ce n'est donc pas le cas que $a \wedge b \in F$. Donc que non $(a \in F$ et $b \in F)$ ou plus exactement $a \notin F$ ou $b \notin F$. Par conséquent, puisque *I* est le complément de *F*, $a \in I$ ou $b \in I$.

$ii) \to iii)$

Définissons $f : A \to 2$ par

$$f(a)\begin{cases} 0 \text{ si } a \in I \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$$

f est un homomorphisme de treillis:

$$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b);\ f(a \vee b) = f(a) \vee f(b);\ f(1) = 1;\ f(0) = 0.$$

Puisque *I* est un idéal, $0 \in I$, donc $f(0) = 0$. $1 \notin I$ par hypothèse, donc $f(1) = 1$.

1) Si $f(a \wedge b) = 0$ donc $a \wedge b \in I$.

$\Rightarrow a \in I$ ou $b \in I$.

Donc $f(a) = 0$ ou $f(b) = 0$, ainsi $f(a) \wedge f(b) = 0$.

Si $f(a \wedge b) = 1$, alors $a \wedge b \notin I$. $a \wedge b \in F$

$\Rightarrow a \in F$ et $b \in F$.

Donc $f(a) = 1 = f(b)$, ainsi $f(a) \wedge f(b) = 1$.

2) Si $f(a \vee b) = 0$ donc $a \vee b \in I$.

$\Rightarrow a \in I$ et $b \in I$.

Donc $f(a) = f(b) = 0$, ainsi $f(a) \vee f(b) = 0$.

Si $f(a \vee b) = 1$, alors $a \vee b \notin I$.

$f(a) \vee f(b) = 0$ ssi $f(a) = f(b) = 0$.

ssi $a \in I$ et $b \in I \Rightarrow a \vee b \in I (\rightarrow\leftarrow)$.

$iii) \rightarrow i)$

Puisque $I = f^{-1}(0)$, le complément de I est $f^{-1}(1)$ et c'est un filtre par le résultat précédent.

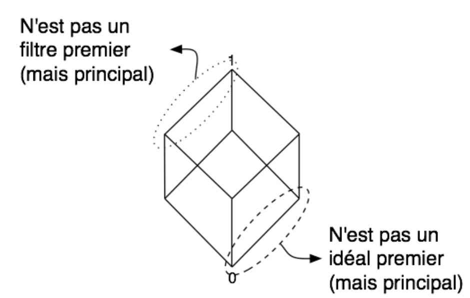
Déf ^{n} :

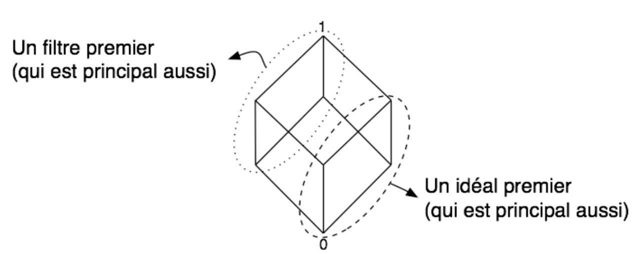
Un idéal *I* qui satisfait une des conditions du théorème précédent est dit *premier*.

La notion duale:

Un filtre *F* est *premier* si $0 \notin F$ et si $a \vee b \in F$, alors $a \in F$ ou $b \in F$.

Ex:





Théorème d'existence des filtres premiers:

Soit A un treillis distributif, F un filtre et I un idéal de A tels que $I \cap F = \varnothing$. Il existe au moins un filtre premier P de A tel que $F \subseteq P$ et $P \cap I = \varnothing$.

Rappel:

Lemme de Zorn:
Soit $\langle A, \leq \rangle$ un ensemble partiellement ordonné. Si toute chaine de A a une borne supérieure, alors A a au moins un élément maximal.

NB: 1) Soit $B \leq A$. B est une chaine de A si B est linéairement ordonné.

2) $a \in A$ est une borne supérieure de B si $x \leq a$ pour $\forall x \in B$.

3) $a \in A$ est un élément maximal s'il existe aucun b tel que $a \leq b$ et $a \neq b$.