Le théorème d'existence des filtres premiers:

Soit A un treillis distributif, F un filtre et I un idéal de A tels que $F \cap I = \varnothing$. Il existe au moins un filtre premier P de A tel que $F \subseteq P$ et $I \cap P = \varnothing$.

Pour démontrer ce théorème, on utilise le *critère de filtre premier* qui s'énonce comme suit:
Soit F_0 un filtre et I_0 un idéal d'un treillis distributif A. Pour tout filtre de A maximal parmi les filtres qui contiennent F_0 et disjoints de I_0 est premier.

Preuve:
Soit P un filtre de A maximal (par la défition de "maximal" du *lemme de Zorn*) parmi les filtres qui contiennent F_0 et $P \cap I_0 = \varnothing$. Puisque I_0 est un idéal, $0 \in I_0$. Puisque $P \cap I_0 = \varnothing$, $0 \notin P$.
Supposons maintenant que $a \vee b \in P$, mais que $a \notin P$ et $b \notin P$. (par l'absurde)
Nous allons construire le filtre $P[a]$ généré par P et a.

$$P[a] = \{c \in A : c \geq x \wedge a \text{ pour un } x \in P\}$$

Remarque:
J'affirme que $P[a]$ est un filtre.

Manifestement $P[a]$ n'est pas vide.
Si $m, n \in P[a] \Rightarrow m \wedge n \in P[a]$.
Soit $m \geq x_1 \wedge a$ et $n \geq x_2 \wedge a$ où $x_1, x_2 \in P$.
Donc

$$\begin{aligned} m \wedge n &\geq (x_1 \wedge a) \wedge (x_2 \wedge a) \\ &\geq x_1 \wedge a \wedge x_2 \wedge a \\ &\geq (x_1 \wedge x_2) \wedge a \end{aligned}$$

et $x_1 \wedge x_2 \in P$

Finalement: Si $m \in A$, $n \in P[a]$ et $n \leq m$, il faut montrer que $m \in P[a]$.
Mais $m \geq n \geq x_1 \wedge a$. Donc $m \in P[a]$ ($P[a]$ est donc un filtre).

Puisque $a \notin P$, $P \subset P[a]$. Puisque P est maximal parmi les filtres qui contiennent F_0 et disjoints de I_0 et puisque manifestement $F_0 \subset P[a]$, nous devons conclure que $P[a]$ n'est pas disjoint de I_0. Donc il existe $m \in I_0 \cap P[a]$. Par définition de $P[a]$, il existe un $x_1 \in P$ tel que $m \geq x_1 \wedge a$.
En reprenant le même raisonnement pour b, nous obtenons $n \in I_0$ et $x_2 \in P$ tel que $n \geq x_2 \wedge a$.

Posons $u = m \vee n$ et $v = x_1 \wedge x_2$.
Alors: $\quad v \wedge a \le u$ et $v \wedge b \le u$.
(*) $x_1 \wedge x_2 \wedge a \le u$ et $x_1 \wedge x_2 \wedge b \le u$

Aussi: $u \in I_0$ puisque $m \in I_0$ et $n \in I_0$ et I_0 est un idéal.
$v \in P$ puisque $x_1, x_2 \in P$ et P est un filtre.
Alors $\underbrace{v \wedge (a \vee b) = (v \wedge a) \vee (v \wedge b)}_{distributivit\acute{e}} \le u$ par (*)

Nous avons supposé que $a \vee b \in P$, P est un filtre, donc $u \in P$. Mais $u \in I_0$ et par hypothèse $P \cap I_0 = \varnothing$. $\to\leftarrow$
Donc si $a \vee b \in P$, alors $a \in P$ ou $b \in P$, P est premier. ■

<u>Preuve</u> (théorème d'existence des filtres premiers):

Soit $\mathfrak{F} = \{F : F \text{ est un filtre de } A, F_0 \in F, F \cap I = \varnothing\}$.
Manifestement $\mathfrak{F}$ est ordonné par l'inclusion. Nous allons appliquer le *lemme de Zorn* à $\mathfrak{F}$.

Si C est une chaîne non-vide dans $\mathfrak{F}$, alors $\bigcup C \in \mathfrak{F}$, i.e. $\bigcup C$ est un filtre, $F_0 \subset \bigcup C$ et $\bigcup C \cap I = \varnothing$. Soit $x \in \bigcup C$, $x \in F_i$, F_i est dans la chaîne. Si $x \le y$, alors $y \in F_i$ puisque F_i est un filtre.

Si $x, y \in \bigcup C$, alors il existe $F_i, F_j \in C$ tels que $x \in F_i$ et $y \in F_j$. Puisque C est une chaîne, soit $F_i \subset F_j$ ou $F_j \subset F_i$. Par conséquent, x et y appartiennent tous deux soit à F_i soit à F_j. Il s'ensuit que $x \wedge y$ appartient soit à F_i soit à F_j puisque ce sont des filtres.
Mais puisque $F_i \subseteq \bigcup C$, $F_j \subseteq \bigcup C$, alors $x \wedge y \in \bigcup C$.

Nous devons montrer que $I \cap \bigcup C = \varnothing$. (Allons-y par l'absurde)

Si $a \in I$ et $a \in \bigcup C$, alors il existe $F \in C$ tel que $a \in F$, ce qui est impossible puisque $F \in \mathfrak{F}$. Manifestement $F_0 \subset \bigcup C$. Pour toute chaîne non-vide $\mathfrak{F}$, $\bigcup \mathfrak{F}$ est une borne supérieure. Pour la chaîne vide, nous posons $F_0 \subseteq \mathfrak{F}$ et elle peut servir de borne supérieure. Puisque $F_0 \cap I = \varnothing$, $F_0 \in \mathfrak{F}$. Le *lemme de Zorn* implique qu'il existe un élément maximal P de $(\mathfrak{F}, \subset)$. Par le critère, tout filtre maximal parmi les filtres qui contiennent F_0 et disjoints de I_0 est premiers. ■

Théorème de représentation de Stone:

Soit $a \neq b$ des éléments arbitraires de A. Il existe un homomorphisme de treillis distributif $f : A \to \mathbb{2}$ tel que $f(a) \neq f(b)$.

Preuve:

Soit $a,b \in A$ et $a \neq b$. Alors soit $a \not\leq b$ ou $b \not\leq a$ (ou les deux).
Supposons que nous avons $a \not\leq b$.

Nous définissons les ensembles suivants:

$$F_0 = \uparrow(a) = \{c \in A : c \geq a\}$$
$$I_0 = \downarrow(b) = \{c \in A : c \leq b\}$$

$\uparrow(a)$ est un filtre. F_0 n'est pas vide puisque $a \geq a$. Si $c_1 \in F_0$ et $c_2 \in F_0$, alors $c_1 \wedge c_2 \in F_0$. $c_1 \geq a$, $c_2 \geq a$, $c_1 \wedge c_2 \geq a$ par définition de l'infimum. Si $d \in A$ et $c \leq d$, alors $d \in F_0$. Il fut démontrer précédemment que I_0 est un idéal.
$F_0 \cap I_0 = \varnothing$. Supposons le contraire.
Donc $\exists c \in F_0 \cap I_0$; $\exists c \in \uparrow(a) \cap \downarrow(b)$. Ainsi $a \leq c$ et $c \leq b$ et par conséquent $a \leq b$. $\to\leftarrow$

Par le *théorème d'existence des filtres premiers,* il existe un filtre premier tel que $\uparrow(a) \subseteq P$ et $\downarrow(b) \cap P = \varnothing$. Puisque $a \in \uparrow(a)$ et $b \in \downarrow(b)$, $a \in P$ et $b \notin P$.

Nous pouvons définir $f : A \to \mathbb{2}$:

$$f(c) = \begin{cases} 1 \text{ si } c \in P \\ 0 \text{ si } c \notin P \end{cases}$$

Donc on a $f(a) \neq f(b)$ et $f(a) = 1$, $f(b) = 0$. ■

Théorème:

Soit A un treillis distributif (ou A une algèbre de Boole), le treillis $(A,\leq)$ se plonge dans un treillis distributif (ou une algèbre de Boole) de la forme $(P(X),\subseteq)$ pour un ensemble X.

Preuve:

Soit $X = Hom(A,\mathbb{2}) = \mathbb{2}^A$, le treillis distributif des homomorphismes de treillis $A \to \mathbb{2}$.
Nous traitons $\mathbb{2}^A$ comme un ensemble et nous considérons $\left(\mathbb{2}^A,\subseteq\right)$ le treillis distributif des sous-ensembles de $\mathbb{2}^A$. $\left[\text{Fait: pour } \forall X,\ P(X) \simeq \mathbb{2}^X\text{; donc en fait, je considère } \mathbb{2}^{\mathbb{2}^A}\right]$

Définissons:

$\psi : A \to P(\mathbb{2}^A)$ par

$\psi(a) = \{ f : A \to \mathbb{2} |\ f(a) = 1 \}$

Nous devons vérifier que:

1) ψ est un homomorphisme de treillis.

2) ψ est injective.

1) ψ est un homomorphisme de treillis.

$\psi(1) = \{ f : A \to \mathbb{2} |\ f(1) = 1 \} = \mathbb{2}^A$

Puisque par définition d'un homomorphisme, $f : A \to \mathbb{2}$ satisfait la condition $f(1) = 1$.

$\psi(0) = \{ f : A \to \mathbb{2} |\ f(0) = 1 \} = \varnothing$

Puisque $f(0) = 0$ pour $\forall f : A \to \mathbb{2}$ par définition.

$\psi(a \wedge b) = \psi(a) \cap \psi(b)$

$\psi(a \wedge b) = \{ f : A \to \mathbb{2} \mid f(a \wedge b) = 1 \}$

$\psi(a) = \{ f : A \to \mathbb{2} \mid f(a) = 1 \}$

$\psi(b) = \{ f : A \to \mathbb{2} \mid f(b) = 1 \}$

$\psi(a) \cap \psi(b) = \{ f : A \to \mathbb{2} \mid f(a) = 1 \wedge f(b) = 1 \}$

Manifestement si $f(a \wedge b) = 1$, alors $f(a) = f(b) = 1$.
Donc $\psi(a \wedge b) \subseteq \psi(a) \cap \psi(b)$.
On veut montrer que si $f(a) = f(b) = 1$, alors $f(a \wedge b) = 1$.
Supposons le contraire, i.e. $f(a \wedge b) = 0$. Donc $a \wedge b \in f^{-1}(0)$ et nous savons que $f^{-1}(0)$ est un idéal premier. Donc $a \in f^{-1}(0)$ ou $b \in f^{-1}(0)$, ce qui est impossible.

$\psi(a \vee b) = \psi(a) \cup \psi(b)$

$\psi(a \vee b) = \{ f : A \to \mathbb{2} |\ f(a \vee b) = 1 \}$

$\psi(a) \cup \psi(b) = \{ f : A \to \mathbb{2} |\ f(a) = 1 \vee f(b) = 1 \}$

Manifestement $\psi(a) \cup \psi(b) \subseteq \psi(a \vee b)$. Il faut montrer que si $f(a \vee b) = 1$, alors $f(a) = 1$ ou $f(b) = 1$. Par hypothèse, $a \vee b \in f^{-1}(1)$ et $f^{-1}(1)$ est un filtre premier. Donc $a \in f^{-1}(1)$ ou $b \in f^{-1}(1)$.

2) ψ est injective.

$$\psi(a) = \psi(b) \Rightarrow a = b$$

On montre la contraposée. Supposons que $a \neq b$. Alors par le *théorème de représentation de Stone*, il existe un homomorphisme de treillis $f : A \to \mathbb{2}$ tel que $f(a) \neq f(b)$ et $f(a) = 1$ et $f(b) = 0$. Par conséquent $\psi(a) \neq \psi(b)$. ■

Remarque:

Un plongement reflète les égalités booléennes. Plus spécifiquement, si $s(\vec{x})$ et $t(\vec{x})$ sont des termes booléens tels que $s(\vec{x}) = t(\vec{x})$ dans $(P(X), \subseteq)$ et soit $\psi : A \to (P(X), \subseteq)$ un plongement. Alors l'égalité $s(\vec{x}) = t(\vec{x})$ est vérifiée dans A lorsque les variables $\vec{x}$ sont remplacées par des éléments $\vec{a}$ de A.

Nous avons:

$$\psi(s^A(\vec{a})) = s^{P(X)}(\psi(\vec{a}))$$
$$\psi(t^A(\vec{a})) = t^{P(X)}(\psi(\vec{a}))$$

Par hypothèse, nous avons que $s^{P(X)}(\psi(\vec{a})) = t^{P(X)}(\psi(\vec{a}))$.
Donc $\psi(s^A(\vec{a})) = \psi(t^A(\vec{a}))$ et puisque ψ est injective, nous avons $s(\vec{a}) = t(\vec{a})$.