LES THÉORÈMES DES MESSIEURS GÖDEL, ROSSER ET TARSKI

Neil Kennedy, UQÀM, 10 mars 2006

1. L'ARITHMÉTISATION DE LA MÉTAMATHÉMATIQUE

L'arithmétisation de *K* commence par une arithmétisation des symboles primitifs. Il faut attribuer un nombre à chaque symbole primitif par la fonction *g*, tel qu'elle est illustrée par les tableaux suivants :

(	)	,	$\neg$	$\Rightarrow$	$\forall$
3	5	7	9	11	13

x_k	a_k	f_k^n	A_k^n
$13+8k$	$7+8k$	$1+8(2^n3^k)$	$3+8(2^n3^k)$

On définit ensuite une fonction Γ qui attribue un nombre à toute expression $u = u_0u_1\cdots u_r$ de *K* (les u_i sont des symboles primitifs) de la manière suivante :

$$\Gamma(u_0u_1\cdots u_r) = 2^{g(u_0)}3^{g(u_1)}\cdots p_r^{\,g(u_r)}$$

où p_i désigne le *i*-ième nombre premier ($p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 5,\ldots$).[1] Si $U_0, U_1, \ldots, U_r$ sont des expressions (c'est-à-dire une suite d'expressions) alors le nombre associé à la suite sera :

$$\Gamma(U_0, U_1, \ldots, U_r) = 2^{\Gamma(U_0)}3^{\Gamma(U_1)}\cdots p_r^{\,\Gamma(U_r)}\,.$$

La fonction Γ associe donc à chaque expression et à chaque suite d'expression de *K* un nombre, et le théorème fondamental de l'algèbre (le fait que tout nombre ait une factorisation en nombres premier unique à l'ordre près) nous donne que : 1) la fonction Γ est injective (deux expressions/suite d'expressions ont des nombres associés différents), et 2) les propriétés syntaxiques des expressions/suite d'expressions sont lisibles à même de nombre de Gödel de celles-ci.

Les notions métathéoriques comme « être un nombre », « être une variable », « être une terme », « être une formule atomique », etc. peuvent donc être traduites numériquement par « être le nombre de Gödel (ndg) d'un nombre », « être le ndg d'une variable », « être le ndg d'un terme », « être le ndg d'une formule atomique », etc. Mentionnons quelques traductions remarquables. Supposons que *K* est une théorie ayant un nombre fini de symboles de constante, de symboles de fonction et de symboles de prédicat. Supposons par ailleurs que *K* contient le symbole de constante « 0 » et le symbole de fonction unaire « f_1^1 ». Nous avons alors que :

(a) $Neg(x)$ est une fonction numérique telle que si *x* le nombre de Gödel d'une expression $\mathcal{E}$ de *K*, $Neg(x)$ est le nombre de Gödel de l'expression $\neg\mathcal{E}$. $Neg(x)$ est toujours une fonction récursive.
(b) $Num(x)$ est une fonction numérique qui associe à chaque nombre *x* le nombre de Gödel du symbole de nombre $\overline{x}$. $Num(x)$ est également récursive, quelque soit *K*.

[1] On remarquera la différence entre le nombre associé à un symbole et le nombre associé à une expression composée de ce seul symbole.

(c) $Sub(x, y, z)$ est une fonction numérique telle que si *x* est le nombre de Gödel d'une expression $\mathcal{E}$, *y* le nombre de Gödel d'un terme et *z* le nombre de Gödel d'une variable, alors $Sub(x, y, z)$ est le nombre de Gödel de l'expression obtenue de $\mathcal{E}$ en substituant chaque occurrence de la variable pour le terme. $Sub(x, y, z)$ est une fonction récursive.
(d) $D(x) = Sub(x, Num(x), 21)$ est la fonction diagonale. $D(x)$ est le nombre de Gödel de l'expression obtenue de l'expression dont le nombre de Gödel est *x* en substituant chaque occurrence de la variable x_1 (la variable dont le nombre de Gödel est 21) par le symbole de nombre $\overline{x}$. Typiquement, si *a* est le nombre de Gödel de $\mathcal{A}(x_1)$, une formule ayant une seule variable libre x_1, $D(a)$ est le nombre de Gödel de $\mathcal{A}(\overline{a})$. $D(x)$ est une fonction récursive.
(e) $\mathrm{PrAx}_K(x)$ est une relation qui tient de *x* si et seulement si *x* est le nombre de Gödel d'un axiome de *K*. Les théorèmes de Gödel s'appliquent seulement à une théorie *K* pour laquelle $\mathrm{PrAx}_K(x)$ est une relation récursive (une telle théorie est dite *récursivement axiomatisable* comme nous le verrons plus loin). $\mathrm{PrAx}_{RR}(x)$ et $\mathrm{PrAx}_S(x)$ sont des relations récursives.
(f) $Pf(x, y)$ est une relation qui tient entre les nombres *x* et *y* si et seulement si *x* est le nombre de Gödel d'une démonstration de la formule dont le nombre de Gödel est *y*. La relation $Pf(x, y)$ est évidemment relative à chaque théorie *K*. $Pf(x, y)$ est une relation récursive si et seulement si $\mathrm{PrAx}_K(x)$ l'est.

Il est important de remarquer que ces fonctions et relations demeurent des fonctions et relations métathéoriques, malgré le fait qu'elles portent des nombres. Le processus d'arithmétisation n'a fait que traduire des fonctions et relations portant sur des entités du langage formelle *K* en des fonctions et relations portant sur des nombres. C'est la représentation qui nous permettra d'importer certaines des fonctions et des relations arithmétisées dans la théorie *K*.

2. LE THÉORÈME DU POINT FIXE

Carnap avait remarqué dès 1934 (dans *La syntaxe logique du langage*) qu'une des idées fondamentales à la démonstration des théorèmes d'incomplétude était la notion de point fixe ou de diagonalisation. Cette idée prend forme dans le théorème suivant.

Théorème du point fixe (3.32, 3.33). Soit *K* une théorie avec égalité qui possède les mêmes symboles que *S* et dans laquelle la fonction diagonale *D* est représentable. Alors, pour toute formule $\mathcal{A}(x_1)$ de *K* d'une seule variable libre x_1, il existe une formule close $\mathcal{B}$ telle que

$$\vdash_K \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{A}(\ulcorner \mathcal{B} \urcorner).$$

(Nous entendons par $\ulcorner \mathcal{B} \urcorner$ une abréviation de $\overline{\Gamma(\mathcal{B})}$, c'est-à-dire le symbole de nombre qui représente le nombre de Gödel de $\mathcal{B}$.)

PREUVE. Soit $\mathfrak{D}(x_1, x_2)$ la formule qui représente D dans K. Construisons d'abord la formule $\mathcal{B}$ qui répondra aux exigences du théorème. Considérons la formule

$(\mathcal{C})$ $\quad \forall x_2(\mathfrak{D}(x_1, x_2) \Rightarrow \mathcal{A}(x_2))$.

Soit c le nombre de Gödel de $\mathcal{C}$ (i.e. $c = \Gamma(\mathcal{C})$). $\mathcal{B}$ est le résultat de la substitution de x_1 par $\bar{c}$ dans $\mathcal{C}$:

$(\mathcal{B})$ $\quad \forall x_2(\mathfrak{D}(\ulcorner \mathcal{C} \urcorner, x_2) \Rightarrow \mathcal{A}(x_2))$.

Soit b le nombre de Gödel de $\mathcal{B}$ (i.e. $b = \Gamma(\mathcal{B})$). De toute évidence, puisque $\mathcal{B}$ (dont le nombre de Gödel est b) est le résultat de la substitution de x_1 par $\ulcorner \mathcal{C} \urcorner$ dans $\mathcal{C}$ (dont le nombre de Gödel est c), il s'ensuit que $D(c) = b$. Par ailleurs, puisque $\mathfrak{D}(x_1, x_2)$ représente D dans K, nous avons

(#) $\quad \vdash_K \mathfrak{D}(\bar{c}, \bar{b})$.

Il suffit donc de montrer : (i) $\vdash_K \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}(\ulcorner \mathcal{B} \urcorner)$ et (ii) $\vdash_K \mathcal{A}(\ulcorner \mathcal{B} \urcorner) \Rightarrow \mathcal{B}$.

Montrons que $\vdash_K \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}(\bar{b})$:

1.	$\mathcal{B}$	Hyp.
2.	$\forall x_2(\mathfrak{D}(\bar{c}, x_2) \Rightarrow \mathcal{A}(x_2))$	1, par définition (1)
3.	$\mathfrak{D}(\bar{c}, \bar{b}) \Rightarrow \mathcal{A}(\bar{b})$	2, règle A4 (1)
4.	$\mathfrak{D}(\bar{c}, \bar{b})$	Par (#) (1)
5.	$\mathcal{A}(\bar{b})$	MP sur 3 et 4 (1)
6.	$\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}(\bar{b})$	5, élimination de 1

Montrons que $\vdash_K \mathcal{A}(\bar{b}) \Rightarrow \mathcal{B}$:

1.	$\mathcal{A}(\bar{b})$	Hyp.
2.	$\mathfrak{D}(\bar{c}, x_2)$	Hyp.
3.	$\exists_1 x_2 \mathfrak{D}(\bar{c}, x_2)$	$\mathfrak{D}$ représente D (1,2)
4.	$\mathfrak{D}(\bar{c}, \bar{b})$	Par (#) (1,2)
5.	$x_2 = \bar{b}$	2-4, propriétés de « = » (1,2)
6.	$\mathcal{A}(x_2)$	1, 5, propriétés de « = » (1,2)
7.	$\mathfrak{D}(\bar{c}, x_2) \Rightarrow \mathcal{A}(x_2)$	6, élimination de 2 (1)
8.	$\forall x_2(\mathfrak{D}(\bar{c}, x_2) \Rightarrow \mathcal{A}(x_2))$	7, généralisation (1)
9.	$\mathcal{A}(\bar{b}) \Rightarrow \forall x_2(\mathfrak{D}(\bar{c}, x_2) \Rightarrow \mathcal{A}(x_2))$	8, élimination de 1
10.	$\mathcal{A}(\bar{b}) \Rightarrow \mathcal{B}$	9, par définition

Par les propriétés de l'équivalence, nous avons montré que $\vdash_K \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{A}(\ulcorner \mathcal{B} \urcorner)$. ▯

3. QUELQUES DÉFINITIONS ET CONDITIONS

Le premier théorème de Gödel fait appel à une hypothèse particulière sur laquelle il faut s'arrêter quelques instants. Il s'agit d'une généralisation de la notion de cohérence.

Définition. Soit K une théorie ayant la constante 0 et le symbole de fonction f_1^1. On dira que K est ω-cohérente si et seulement si, pour toute formule $\mathcal{A}(x_1)$, si $\vdash_K \neg\mathcal{A}(\overline{n})$ pour tout n, alors ce n'est pas le cas que $\vdash_K \exists x_1 \mathcal{A}(x_1)$.

Quelques remarques s'imposent :

(a) En gros, une théorie ω-cohérente est une théorie qui ne permet pas que les formules $\neg\mathcal{A}(0)$, $\neg\mathcal{A}(\overline{1})$, $\neg\mathcal{A}(\overline{2})$, ... et $\exists x_1 \mathcal{A}(x_1)$ soient toutes des théorèmes.
(b) La condition peut aussi être formulée de la manière suivante : si pour tout n, $\vdash_K \mathcal{A}(\overline{n})$, alors $\nvdash_K \neg\forall x_1 \mathcal{A}(x_1)$.
(c) Une théorie ω-cohérente est nécessairement cohérente. En effet, par contraposition, si une théorie est contradictoire, tout est démontrable. Donc elle ne peut être ω-cohérente.
(d) Il existe des théories ω-incohérentes (qui ne sont pas ω-cohérentes) qui sont cohérentes. Le premier théorème d'incomplétude de Gödel permet d'en engendrer.

Le premier théorème de Gödel vise à démontrer que certains énoncés ont une propriété particulière inattendue, l'indécidabilité :

Définition. Une formule indécidable d'une théorie K est une formule close $\mathcal{A}$ telle que ni $\mathcal{A}$ ni $\neg\mathcal{A}$ sont des théorèmes, i.e. $\nvdash_K \mathcal{A}$ et $\nvdash_K \neg\mathcal{A}$.

Encore quelques remarques avant de poursuivre :

(a) Une théorie K qui possède une formule indécidable $\mathcal{A}$ est forcément cohérente (puisque $\mathcal{A}$ n'est pas un théorème). Elle admet donc un modèle $\mathfrak{M}$ (d'après la proposition 2.17, p. 71). Dans ce cas, nous aurons $\vDash_{\mathfrak{M}} \mathcal{A}$ ou $\vDash_{\mathfrak{M}} \neg\mathcal{A}$ d'après la définition de satisfaction dans un modèle (p. 48). Ce qui veut dire qu'il existe une formule vraie (dans le modèle $\mathfrak{M}$) qui est indémontrable (dans la théorie K).
(b) Une telle théorie est évidemment incomplète.

Pour la démonstration du théorème, nous devons faire quelques hypothèses sur la théorie K. D'abord, pour l'application du théorème du point fixe, il fallait que K soit une théorie avec égalité ayant les mêmes symboles primitifs que S et à l'intérieur de laquelle la fonction diagonale D est représentable. Pour la suite, nous devrons supposer par ailleurs que :

(1) La relation $\mathrm{PrAx}(x)$ est récursive;
(2) $\vdash_K 0 \neq \overline{1}$;
(3) Toute fonction récursive est représentable dans K.

Ces conditions sont évidemment remplies par les théories RR et S.

4. LE PREMIER THÉORÈME D'INCOMPLÉTUDE DE GÖDEL

L'énoncé indécidable de Gödel est obtenu comme suit. Soit $\mathcal{A}(x_1)$ la formule $\forall x_2 \neg \mathcal{P}f(x_2, x_1)$. Intuitivement, $\mathcal{A}(x_1)$ affirme de la formule dont le nombre de Gödel est x_1 qu'elle est indémontrable, i.e. qu'aucune formule (dont le nombre de Gödel est) x_2 n'est une démonstration de la formule dont le nombre de Gödel est x_1. Par le théorème du point fixe, il existe une formule close $\mathcal{G}$ telle que

(G) $\quad \vdash_K \mathcal{G} \Leftrightarrow \forall x_2 \neg \mathcal{P}f(x_2, \ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$.

Intuitivement, cette équivalence exprime que la formule $\mathcal{G}$ est vraie si et seulement si elle est indémontrable. Formellement, nous avons :

Premier théorème d'incomplétude (3.35). Si *K* est cohérente, alors $\nvdash_K \mathcal{G}$. Si *K* est ω-cohérente, alors $\nvdash_K \neg \mathcal{G}$.

PREUVE. Montrons que $\nvdash_K \mathcal{G}$. Supposons le contraire, $\vdash_K \mathcal{G}$. Soit *g* le nombre de Gödel de $\mathcal{G}$ et *p* le nombre de Gödel d'une preuve de $\mathcal{G}$. Nous avons alors que la relation récursive $\mathrm{Pr}(p, g)$ tient. Puisque $\mathrm{Pr}(x, y)$ est représentable (par $\mathcal{P}f(x_1, x_2)$ de surcroît), nous avons que $\vdash_K \mathcal{P}f(\overline{p}, \overline{g})$, c'est-à-dire $\vdash_K \mathcal{P}f(\overline{p}, \ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$. D'un autre côté, par (G), nous pouvons déduire (de la prouvabilité de $\mathcal{G}$) que $\vdash_K \forall x_2 \neg \mathcal{P}f(x_2, \ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$; en particulier, nous pouvons en déduire que $\vdash_K \neg \mathcal{P}f(\overline{p}, \ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$ par instanciation du quantificateur universel. Mais ceci contredit la cohérence de *K*. D'où $\nvdash_K \mathcal{G}$.

Montrons maintenant que $\nvdash_K \neg \mathcal{G}$. Encore une fois, supposons le contraire, $\vdash_K \neg \mathcal{G}$. Soit *g* le nombre de Gödel de $\mathcal{G}$. Par (G), nous obtenons dans un premier temps que $\vdash_K \neg \forall x_2 \neg \mathcal{P}f(x_2, \ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$, c'est-à-dire que

(|) $\quad \vdash_K \exists x_2 \mathcal{P}f(x_2, \ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$.

D'autre part, puisque *K* est cohérente (car elle est ω-cohérente) et que $\vdash_K \neg \mathcal{G}$, il s'ensuit que $\nvdash_K \mathcal{G}$ et donc non-$\mathrm{Pr}(p, g)$ pour tout *p*. Par la représentabilité de $\mathrm{Pr}(x, y)$, ceci entraîne que

(||) $\quad \vdash_K \neg \mathcal{P}f(\overline{p}, \ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$, pour tout nombre naturel *p*.

Mais (|) et (||) contredisent l'ω-cohérence de *K*. D'où le résultat. ▯

Il convient de faire quelques remarques à présent :

(a) Nous avons montré par le théorème que les énoncés $\mathcal{G}$ et $\neg \mathcal{G}$ étaient indémontrables, mais lequel des deux est vrai dans le modèle standard? Il s'agit de $\mathcal{G}$. Supposons que $\neg \mathcal{G}$ était vrai. Puisque (G) est un théorème, il s'ensuit que $\neg \forall x_2 \neg \mathcal{P}f(x_2, \ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$ est vrai. Mais ce dernier est vrai dans le cas où il existe un nombre *n* tel que la relation qui interprète $\mathcal{P}f(x_1, x_2)$ dans le modèle standard tient entre *n* et *g* (le nombre de Gödel de $\mathcal{G}$). Mais la relation qui interprète $\mathcal{P}f(x_1, x_2)$ dans le modèle standard est la relation $Pf(x, y)$.

Par conséquent, de la vérité de $\neg\forall x_2 \neg \mathcal{P}\!f(x_2, \ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$ on en déduit que $Pf(n, g)$ pour un certain *n*. Ce qui contredit l'indécidabilité de $\mathcal{G}$.

(b) La formule indécidable $\forall x_2 \neg \mathcal{P}\!f(x_2, \ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$ est la généralisation de la formule $\neg \mathcal{P}\!f(x_2, \ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$. Puisque cette formule représente la relation récursive non-$Pf(x, g)$, elle est décidable. Ainsi, il existe des formules indécidables qui sont seulement à une généralisation près des formules décidables.

(c) Nous pouvons construire une extension de *K* (une théorie qui satisfait les hypothèses du théorème) qui est cohérente mais ω-incohérente. Nous savons par le théorème que $\vdash_K \neg \mathcal{P}\!f(\overline{n}, \ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$ pour tout *n*, puisque $Pf(x, y)$ est représentable et que $\mathcal{G}$ est indémontrable. Par le théorème, nous avons également que $\forall x_2 \neg \mathcal{P}\!f(x_2, \ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$ n'est pas un théorème (car elle est équivalente à $\mathcal{G}$). Nous pouvons donc construire une extension cohérente K' de *K* en rajoutant la formule $\neg\forall x_2 \neg \mathcal{P}\!f(x_2, \ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$ aux axiomes de *K*, c'est-à-dire la formule $\exists x_2 \mathcal{P}\!f(x_2, \ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$. Ainsi, $\vdash_{K'} \exists x_2 \mathcal{P}\!f(x_2, \ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$ et $\vdash_{K'} \neg \mathcal{P}\!f(\overline{n}, \ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$, pour tout *n*, dans cette théorie.

(d) Nous savons que les notions de cohérence et de complétude sont complémentaires. Existe-t-il un complément de l'ω-cohérence? Oui, il s'agit de l'ω-complétude. Une théorie *K* est ω-complète si et seulement si, lorsque $\vdash_K \mathcal{A}(\overline{n})$, il s'ensuit que $\vdash_K \forall x_1 \mathcal{A}(x_1)$. Le théorème de Gödel nous permet de voir que nos théories arithmétiques ne jouissent pas de cette propriété. En effet, $\vdash_K \neg \mathcal{P}\!f(\overline{n}, \ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$ pour tout *n* mais $\forall x_2 \neg \mathcal{P}\!f(x_2, \ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$ est indémontrable.

5. Le théorème de Gödel-Rosser

Le théorème de Gödel tel qu'il est énoncé ci-dessus n'a pas la généralité qu'on lui souhaiterait. Nous voudrions bien pouvoir éliminer l'ω-cohérence de *K* des hypothèses du théorème, de sorte à montrer que l'incomplétude ne dépend pas intrinsèquement de l'ω-cohérence. Rosser a réussi à trouver une formule dont l'indécidabilité était démontrable en supposant seulement la cohérence de la théorie. Nous obtiendrons cette formule en appliquant le théorème du point fixe à une autre formule $\mathcal{E}(x_1)$ bien choisie :

$$\forall x_2 (\mathcal{P}\!f(x_2, x_1) \Rightarrow \forall x_3 (\mathcal{N}eg(x_1, x_3) \Rightarrow \exists x_4 (x_4 \leq x_2 \wedge \mathcal{P}\!f(x_4, x_3)))) .$$

(La formule $\mathcal{N}eg(x_1, x_2)$ est la formule qui représente la fonction récursive $Neg(x)$.) Soit $\mathcal{R}$ la formule de Rosser. Par construction, nous avons donc que

(§) $\quad \vdash_K \mathcal{R} \Leftrightarrow \mathcal{E}(\ulcorner \mathcal{R} \urcorner)$.

Intuitivement, la formule $\mathcal{R}$ est vraie si et seulement si l'existence d'une preuve de $\mathcal{R}$ entraîne l'existence d'une preuve (de longueur inféreieure) de la négation de $\mathcal{R}$.

Pour démontrer le théorème de Rosser pour *K*, il faudra rajouter deux autres conditions sur celle-ci (en plus des conditions 1-3) : pour tout nombre naturel *n*,

(4) $\vdash_K x_1 \leq \overline{n} \Rightarrow (x_1 = 0 \vee x_1 = \overline{1} \vee \cdots \vee x_1 = \overline{n})$;

(5) $\vdash_K x_1 \leq \overline{n} \vee \overline{n} \leq x_1$.

On remarquera que la théorie *S* et le système de Robinson *RR* satisfont ces conditions, de même que les trois premières.

Théorème de Gödel-Rosser (3.36). Si K est cohérente, alors $\mathcal{R}$ est indécidable.

PREUVE. Soit r le nombre de Gödel de $\mathcal{R}$ et s le nombre de Gödel de sa négation. Montrons que (i) $\nvdash_K \mathcal{R}$ et (ii) $\nvdash_K \neg\mathcal{R}$.

Par l'absurde, supposons que $\vdash_K \mathcal{R}$. Par (§), nous avons $\vdash_K \mathcal{E}(\ulcorner\mathcal{R}\urcorner)$, c'est-à-dire

($) $\vdash_K \forall x_2(\mathcal{Pf}(x_2,\overline{r}) \Rightarrow \forall x_3(\mathcal{Neg}(\overline{r},x_3) \Rightarrow \exists x_4(x_4 \le x_2 \wedge \mathcal{Pf}(x_4,x_3))))$.

Soit p le nombre de Gödel d'une preuve de $\mathcal{R}$ dans K. Nous avons donc que $\Pr(p,r)$ et par représentabilité $\vdash_K \mathcal{Pf}(\overline{p},\overline{r})$. En appliquant la règle A4 (l'instanciation de l'universel) à ($), nous obtenons $\vdash_K \mathcal{Pf}(\overline{p},\overline{r}) \Rightarrow \forall x_3(\mathcal{Neg}(\overline{r},x_3) \Rightarrow \exists x_4(x_4 \le \overline{p} \wedge \mathcal{Pf}(x_4,x_3))$ et

($$) $\vdash_K \forall x_3(\mathcal{Neg}(\overline{r},x_3) \Rightarrow \exists x_4(x_4 \le \overline{p} \wedge \mathcal{Pf}(x_4,x_3))$

par modus ponens avec $\mathcal{Pf}(\overline{p},\overline{r})$. Puisque s est le nombre de Gödel de $\neg\mathcal{R}$, nous avons $Neg(r)=s$ et donc $\vdash_K \mathcal{Neg}(\overline{r},\overline{s})$. En appliquant A4 à ($$), nous avons

(|) $\vdash_K \mathcal{Neg}(\overline{r},\overline{s}) \Rightarrow \exists x_4(x_4 \le \overline{p} \wedge \mathcal{Pf}(x_4,\overline{s})$.

Par modus ponens sur (|), nous arrivons à $\vdash_K \exists x_4(x_4 \le \overline{p} \wedge \mathcal{Pf}(x_4,\overline{s})$, ce qui est une abréviation pour

(||) $\vdash_K \neg\forall x_4 \neg(x_4 \le \overline{p} \wedge \mathcal{Pf}(x_4,\overline{s})$.

Maintenant, il s'ensuit de la cohérence de K et de la prouvabilité de $\mathcal{R}$ que $\nvdash_K \neg\mathcal{R}$. Ainsi, pour tout nombre naturel n, ce n'est pas le cas que $\Pr(n,s)$. Par conséquent, $\vdash_K \neg\mathcal{Pf}(\overline{n},\overline{s})$ pour tout nombre naturel n. Puisque K est une théorie avec égalité, nous avons pour n'importe quel n que

(&) $\vdash_K x_4 = \overline{n} \Rightarrow \neg\mathcal{Pf}(x_4,\overline{s})$.

Par ailleurs,

(&&) $\vdash_K x_4 \le \overline{k} \Rightarrow x_4 = 0 \vee x_4 = \overline{1} \vee \cdots \vee x_4 = \overline{k}$

car K satisfait la condition (4). En utilisant la tautologie convenable, (&) et (&&) nous donnent que $\vdash_K x_4 \le \overline{k} \Rightarrow \neg\mathcal{Pf}(x_4,\overline{s})$ et, par une autre tautologie encore, que $\vdash_K \neg(x_4 \le \overline{k} \wedge \mathcal{Pf}(x_4,\overline{s}))$. En généralisant sur x_4, nous avons

(#) $\vdash_K \forall x_4 \neg(x_4 \le \overline{k} \wedge \mathcal{Pf}(x_4,\overline{s}))$.

Mais (#) contredit (||), d'où le résultat.

Montrons que $\nvdash_K \neg\mathcal{R}$. Par l'absurde, supposons que $\vdash_K \neg\mathcal{R}$. Soit q le nombre de Gödel d'une preuve de $\neg\mathcal{R}$ dans K. Nous avons donc que $\Pr(q,s)$ et, par conséquent, $\vdash_K \mathcal{Pf}(\overline{q},\overline{s})$. Par une application de la règle E4 (introduction de l'existentiel),

(¶) $\vdash_K \overline{q} \le x_2 \Rightarrow \exists x_4(x_4 \le x_2 \Rightarrow \mathcal{Pf}(x_4,\overline{s}))$.

Par la cohérence de K, $\nvdash_K \mathcal{R}$, et donc $\Pr(n,r)$ pour tout n. Ainsi, $\vdash_K \neg\mathcal{Pf}(\overline{n},\overline{r})$ pour tous nombres naturels n. Par la condition (4), $\vdash_K x_4 \le \overline{q} \Rightarrow x_4 = 0 \vee x_4 = \overline{1} \vee \cdots \vee x_4 = \overline{q}$ et donc

(¶¶) $\vdash_K x_4 \le \overline{q} \Rightarrow \neg\mathcal{Pf}(x_4,\overline{r})$.

Maintenant, considérons la dérivation suivante dans K :

1. $\mathcal{Pf}(x_2,\overline{r})$ Hyp.

2.	$\mathscr{Neg}(\overline{r}, x_3)$	Hyp.
3.	$x_2 \le \overline{q} \vee \overline{q} \le x_2$	Condition 5 (1,2)
4.	$\overline{q} \le x_2 \Rightarrow \exists x_4 (x_4 \le x_2 \Rightarrow \mathscr{Pf}(x_4, \overline{s}))$	(¶) (1,2)
5.	$x_4 \le \overline{q} \Rightarrow \neg \mathscr{Pf}(x_4, \overline{r})$	(¶¶) (1,2)
6.	$\neg \mathscr{Pf}(x_4, \overline{r}) \vee \exists x_4 (x_4 \le x_2 \Rightarrow \mathscr{Pf}(x_4, \overline{s}))$	3-5, tautologie (1,2)
7.	$\exists x_4 (x_4 \le x_2 \Rightarrow \mathscr{Pf}(x_4, \overline{s}))$	1, 6, tautologie (1,2)
8.	$\mathscr{Neg}(\overline{r}, \overline{s})$	Déjà prouvé (1,2)
9.	$\exists_1 x_3 \mathscr{Neg}(\overline{r}, x_3)$	$\mathscr{Neg}$ représente *Neg* (1,2)
10.	$x_3 = \overline{s}$	2, 8, 9, propriétés de « = » (1,2)
11.	$\exists x_4 (x_4 \le x_2 \Rightarrow \mathscr{Pf}(x_4, x_3))$	7, 10, propriétés de « = » (1,2)
12.	$\mathscr{Neg}(\overline{r}, x_3) \Rightarrow \exists x_4 (x_4 \le x_2 \Rightarrow \mathscr{Pf}(x_4, x_3))$	11, élimination de 2 (1)
13.	$\forall x_3 (\mathscr{Neg}(\overline{r}, x_3) \Rightarrow \exists x_4 (x_4 \le x_2 \Rightarrow \mathscr{Pf}(x_4, x_3)))$	12, généralisation (1)
14.	$\mathscr{Pf}(x_2, \overline{r}) \Rightarrow \forall x_3 (\mathscr{Neg}(\overline{r}, x_3)$ $\Rightarrow \exists x_4 (x_4 \le x_2 \Rightarrow \mathscr{Pf}(x_4, x_3)))$	13, élimination de 1
15.	$\forall x_2 (\mathscr{Pf}(x_2, \overline{r}) \Rightarrow \forall x_3 (\mathscr{Neg}(\overline{r}, x_3)$ $\Rightarrow \exists x_4 (x_4 \le x_2 \Rightarrow \mathscr{Pf}(x_4, x_3))))$	14, généralisation
16.	$\mathcal{R}$	15, par définition

Nous avons donc que $\mathcal{R}$ et $\neg\mathcal{R}$ sont démontrables dans *K*, contradiction. D'où le résultat. □

Définition. Une théorie *K* est dite *récursivement axiomatisable* si et seulement si il existe une théorie K' qui possède les même théorèmes que *K* et pour laquelle la relation $\mathrm{PrAx}_{K'}(x)$ est récursive.

Corollaire (3.37). Soit *K* une théorie ayant les mêmes symboles que *S*. Si *K* est une extension cohérente et récursivement axiomatisable de *RR*, alors *K* admet un énoncé indécidable (*K* est incomplète).

PREUVE. Soit K' une théorie qui possède les mêmes théorèmes que *K* et pour laquelle la relation $\mathrm{PrAx}_{K'}(x)$ est récursive. Les conditions 1-5 sont donc remplies. Par le théorème de Gödel-Rosser, il existe un énoncé de K' qui est indécidable dans K'. Cet énoncé est également un énoncé de *K*, et il est indécidable dans *K* parce que *K* et K' ont les mêmes théorèmes. □

6. LE THÉORÈME DE TARSKI

Si *K* est une théorie, Th_K dénote l'ensemble des nombres de Gödel des théorèmes de *K*. La théorie *K* est dite *récursivement décidable* si et seulement si Th_K est un ensemble récursif, c'est-à-dire que la relation $x \in Th_K$ est récursive. Pareillement, *K* est dite *récursivement indécidable* si et seulement si Th_K n'est pas récursif. Par ailleurs, *K* est dite *essentiellement récursivement indécidable* si et seulement si *K* et toute extension cohérente de *K* sont récursivement indécidables.

Proposition 3.41. Soit *K* une théorie cohérente avec égalité ayant les mêmes symboles que *S* et dans laquelle la fonction diagonale *D* est représentable. Alors la relation $x \in Th_K$ n'est pas représentable dans *K*.

PREUVE. Supposons que la relation $x \in Th_K$ est représentable dans *K* par la formule $\mathfrak{Th}(x_1)$. Ainsi,
(a) Si $n \in Th_K$ alors $\vdash_K \mathfrak{Th}(\overline{n})$.
(b) Si $n \notin Th_K$ alors $\vdash_K \neg\mathfrak{Th}(\overline{n})$.
Par le théorème du point fixe appliqué à $\neg\mathfrak{Th}(x_1)$, il existe un énoncé $\mathcal{B}$ (une formule close) tel que
(|) $\vdash_K \mathcal{B} \Leftrightarrow \neg\mathfrak{Th}(\overline{b})$,
où *b* est le nombre de Gödel de $\mathcal{B}$.

Si $\mathcal{B}$ est démontrable, alors $b \in Th_K$. Par (a), il s'ensuit que $\vdash_K \mathfrak{Th}(\overline{b})$. Mais de (|) et la démontrabilité de $\mathcal{B}$, nous avons $\vdash_K \neg\mathfrak{Th}(\overline{b})$. Ce qui contredit la cohérence de *K*.

Si $\mathcal{B}$ n'est pas démontrable, alors $b \notin Th_K$. Dans ce cas, par (b), nous avons que $\vdash_K \neg\mathfrak{Th}(\overline{b})$. Mais par (|), ceci entraîne que $\vdash_K \mathcal{B}$, ce qui est contradictoire.

La relation $x \in Th_K$ n'est donc pas représentable. ▯

Il y a quelque chose d'intéressant dans ce théorème, en ce en sens que nous avons une définition de la relation $x \in Th_S$ qui est « presque » récursive (elle est le résultat d'une quantification existentielle sur une relation récursive, donc représentable). Bien que la relation $x \in Th_S$ ne soit pas représentable, elle jouit d'une propriété plus faible, elle est *arithmétique*.

Définition. Un ensemble *A* de nombres naturels est dit *arithmétique* si et seulement si il existe une formule $\mathcal{A}(x_1)$ de *S* avec une seule variable x_1, telle que pour tout nombre naturel *n*,

$n \in A$ si et seulement si $\mathcal{A}(\overline{n})$ est vraie dans le modèle standard.

Quelques remarques :
(a) Il s'agit d'un affaiblissement de la représentabilité. Nous avons remplacé « est un théorème dans *S* » par « est vraie dans le modèle standard de *S* ».
(b) Toute relation représentable est automatiquement arithmétique, mais l'inverse n'est pas vrai.
(c) La relation $x \in Th_S$ est arithmétique. En effet, si *n* est une nombre naturel, la formule $\exists x_2 \mathfrak{Pf}(x_2, \overline{n})$ est vraie dans le modèle standard de *S* si et seulement si il existe un nombre *p* telle que *p* est le nombre de Gödel d'une démonstration de la formule dont le nombre de Gödel est *n*, c'est-à-dire si et seulement si $n \in Th_S$.

(d) Cette définition n'est pas aussi générale qu'elle pourrait l'être. Elle n'est ni restreinte à *S* ni à un « modèle standard ». On peut aménager cette définition de sorte à convenir à une théorie *K* qui possède le symbole de constante « 0 » et le symbole de fonction unaire « f_1^1 » (le successeur « ' »). D'autre part, il suffit de prendre un modèle $\mathscr{M}$ de *K* dont l'ensemble de base est composé des nombres naturels (de sorte que nous ayons la corrélation entre « *n* » et « $\bar{n}$ »). Dans ce cadre général, une ensemble *A* de nombres naturels est dit *arithmétique* pour le modèle $\mathscr{M}$ dans la théorie *K* si et seulement si il existe une formule $\mathcal{A}(x_1)$ de *K* avec une seule variable x_1, telle que pour tout nombre naturel *n*,

$$n \in A \text{ si et seulement si } \vDash_{\mathscr{M}} \mathcal{A}(\bar{n}).$$

(e) Cette définition peut être généralisée pour être applicable à des relations à plusieurs variables (par opposition aux relations à une variable).

Même si cette définition est plus souple que la représentabilité, il reste certaines relations arithmétiques qui ne sont pas arithmétiques. Si Tr est l'ensemble de tous les nombres de Gödel des formules de *S* qui sont vraies dans le modèle standard, alors Tr n'est pas arithmétique. C'est le théorème de Tarski.

Théorème de Tarski (3.42). Tr n'est pas arithmétique.

PREUVE. Soit S' l'extension de *S* qui a pour axiomes toutes les formules de *S* qui sont vraies dans le modèle standard. (Pour que tout se passe bien ici, il faut supposer que le modèle standard est non contradictoire.) Par définition, $T_{S'}$ est identique à Tr. Par définition encore, nous avons que pour toute formule $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ est vraie dans le modèle standard si et seulement si $\vdash_{S'} \mathcal{A}$. Ainsi, un ensemble *A* est arithmétique si et seulement si il est représentable dans S'. En particulier, Tr est arithmétique si et seulement si l'ensemble $Tr = T_{S'}$ est représentable dans S'. Mais S' est une extension cohérente de *RR* dans laquelle la fonction diagonale *D* est représentable. Par la proposition 3.41, la relation $x \in T_{S'}$ n'est pas représentable dans S'. Tr n'est donc pas arithmétique. ∎