QUELQUES THÉORIES QUI ÉCHAPPENT AU 1ER THÉORÈME D'INCOMPLÉTUDE DE GÖDEL*

Luc Bélair

Table des matières

1 Trois théories

1.1 Les ordres denses sans extrémités

Le langage du premier ordre est le suivant : deux prédicats binaires, $=$ et $<$. Appelons T_1 la théorie de ce langage dont le modèle naturel à avoir en tête est l'ordre habituel des nombres rationnels, $(\mathbb{Q}, =, <)$, et dont les axiomes sont :

AXIOMES D'ORDRE DENSE SANS EXTRÉMITÉS [1]

(Axiomes d'égalité)

(1) $\forall x_1(x_1 = x_1)$

(2) $\forall x_1 \forall x_2(x_1 = x_2 \to x_2 = x_1)$

(3) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3((x_1 = x_2 \wedge x_2 = x_3) \Rightarrow x_1 = x_3)$

---

*Séminaire de logique, UQAM, le 20 octobre 2005.

[1] Traitée dans le livre de Mendelson, *Introduction to mathematical logic*, chap. 2, §.8 .

(Axiomes d'ordre total strict)

(4) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (x_1 < x_2 \wedge x_2 < x_3 \Rightarrow x_1 < x_3)$

(5) $\forall x_1 \forall x_2 (x_1 < x_2 \vee x_1 = x_2 \vee x_2 < x_1)$

(6) $\forall x_1 \forall x_2 (x_1 = x_2 \Rightarrow \neg(x_1 < x_2))$

(Axiome de densité)

(7) $\forall x_1 \forall x_2 (x_1 < x_2 \Rightarrow \exists x_3 (x_1 < x_3 \wedge x_3 < x_2)$

(Axiome d'absence d'extrémités)

(8) $\forall x_1 \exists x_2 \exists x_3 (x_1 < x_2 \wedge x_3 < x_1)$

1.2 L'arithmétique de Presburger

Le langage du premier ordre est le langage de l'arithmétique formelle déjà vu *mais sans la multiplication* : un prédicat binaire =,un symbole de constante 0, un symbole de fonction unaire $'$, un symbole de fonction binaire +. Appelons T_2 la théorie dont le modèle naturel est $(\mathbb{N}, =, 0, \ ', +)$, où $n' = n + 1$, et dont les axiomes sont :

AXIOMES DE L'ARITHMÉTIQUE DE PRESBURGER[2]

(S1) $x_1 = x_2 \Rightarrow (x_1 = x_3 \Rightarrow x_2 = x_3)$

(S2) $x_1 = x_2 \Rightarrow x_1' = x_2'$

(S3) $0 \neq x_1'$

(S4) $x_1' = x_2' \Rightarrow x_1 = x_2$

(S5) $x_1 + 0 = x_1$

(S6) $x_1 + x_2' = (x_1 + x_2)'$

(S9) Pour chaque formule $A(x)$,
$A(0) \Rightarrow (\forall x (A(x) \Rightarrow A(x'))) \Rightarrow \forall x A(x))$

1.3 La géométrie euclidienne plane

Le langage du premier ordre est le suivant : un prédicat binaire =, deux prédicats ternaires ϵ et α, et un prédicat quaternaire δ. Le modèle naturel est $\mathcal{P} = (\mathbb{P}, =, \epsilon, \alpha, \delta)$ où $\mathbb{P}$ désigne le plan euclidien, et les prédicats sont interprétés comme suit :

- $\epsilon(x, y, z)$ les points x, y, z sont alignés, x, z distincts et y entre x et z ;
- $\delta(x, y, z, u)$: la distance entre les points x, y est égale à celle entre z, u ;

[2]Aussi traitée dans le livre de Mendelson (ibid., chap. 3, §.1).

– $\alpha(x,y,z)$: les points x, y, z sont alignés.

Par exemple, dans ce formalisme, la proposition *Dans un triangle quelconque, les trois médianes se coupent.* peut s'exprimer de la façon suivante : $\forall X \forall Y \forall Z \forall A \forall B \forall C((\neg \alpha XYZ \wedge \epsilon XCY \wedge \epsilon XBC \wedge \epsilon YAZ \wedge \delta XCCY \wedge \delta YAAC \wedge \delta XBBZ) \Rightarrow \exists U(\epsilon XUA \wedge \epsilon YUB \wedge \epsilon ZUC))$ (N.B. X, Y, Z sont les sommets, etc.). Il peut sembler que le langage géométrique de Tarski est limité, mais Tarski afffirme qu'on peut y exprimer pratiquement tout le contenu géométrique des Éléments d'Euclide. Il est instructif d'exprimer le théorème de Pythagore dans ce formalisme.

La structure $\mathcal{P}$ est un modèle de la théorie T_3 dont voici les axiomes :

AXIOMES DE TARSKI POUR LA GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE PLANE

1. (Axiome d'identité pour ϵ)
   $\forall X \forall Y(\epsilon XYX \to X = Y)$
2. (Axiome de transitivité de ϵ)
   $\forall X \forall Y \forall Z \forall U((\epsilon XYU \wedge \epsilon YZU) \to \epsilon XYZ)$
3. (Axiome de connexité de ϵ)
   $\forall X \forall Y \forall Z \forall U(((\epsilon XYZ \wedge \epsilon XYU \wedge X \neq Y) \to (\epsilon XZU \vee \epsilon XUZ)))$
4. (Axiome de réflexivité de δ)
   $\forall X \forall Y \delta XYXY$
5. (Axiome d'identité pour δ)
   $\forall X \forall Y \forall Z(\delta XYZZ \to X = Y)$
6. (Axiome de transitivité pour δ)
   $\forall X \forall Y \forall Z \forall U \forall V \forall W((\delta XYZU \wedge \delta XYVW) \to \delta ZUVW)$
7. (Axiome de Pasch)
   $\forall T \forall X \forall Y \forall Z \forall U \exists V((\epsilon XTU \wedge \epsilon YUZ) \to (\epsilon XVY \wedge \epsilon ZTV))$
8. (Axiome d'Euclide)
   $\forall T \forall X \forall Y \forall Z \forall U \exists V \exists W$
   $((\epsilon XUT \wedge \epsilon YUZ \wedge X \neq U) \to (\epsilon XZV \wedge \epsilon XYW \wedge \epsilon VTW)$
9. $\forall X \forall X' \forall Y \forall Y' \forall Z \forall Z' \forall U \forall U'$
   $((\delta XYX'Y' \wedge \delta YZY'Z' \wedge \delta XUX'U' \wedge \delta YUY'U'$
   $\wedge \epsilon XYZ \wedge \epsilon X'Y'Z' \wedge X \neq Y) \to \delta ZUZ'U')$
10. (Axiome de construction des segments)
    $\forall X \forall Y \forall U \forall V \exists Z(\epsilon XYZ \wedge \delta YZUV)$
11. (Axiome de dimension)
    $\exists X \exists Y \exists Z(\neg \epsilon XYZ \wedge \neg \epsilon YZX \wedge \neg \epsilon ZXY)$

12. (Second axiome de dimension)
$\forall X \forall Y \forall Z \forall U \forall V$
$((\delta XUXV \wedge \delta YUYV \wedge \delta ZUZV \wedge U \neq V) \rightarrow (\epsilon XYZ \vee \epsilon YZX \vee \epsilon ZXY))$
13. (Axiomes de continuité)
Pour chaque formule $\varphi[X, V_1, \ldots, V_n]$ et chaque formule $\psi[Y, V_1, \ldots, V_n]$, en particulier Y, Z, U n'ont aucune occurence libre dans φ et X, Z, U n'ont aucune occurence libre dans ψ,
$\forall V_1 \ldots \forall V_n$
$(\forall Z \exists X \exists Y((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \epsilon ZXY) \rightarrow \exists U \forall X \forall Y((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \epsilon XUY)))$
14. (Axiomes d'égalité)
    (a) $\forall X(X = X)$
    (b) $\forall X \forall Y(X = Y \Rightarrow Y = X)$
    (c) $\forall X \forall Y \forall Z((X = Y \wedge Y = Z) \Rightarrow X = Z)$
    (d) $\forall X \forall Y \forall Z \forall U \forall V \forall W[(X = U \wedge Y = V \wedge Z = W) \Rightarrow ((\alpha XYZ \iff \alpha UVW) \wedge (\epsilon XYZ \iff \epsilon UVW))]$
    (e) $\forall X \forall Y \forall Z \forall Z' \forall U \forall V \forall W \forall W'[(X = U \wedge Y = V \wedge Z = W \wedge Z' = W') \Rightarrow (\delta XYZZ' \iff \delta UVWW')]$
15. (Définition de α par ϵ)

$$\begin{aligned}\forall X \forall Y \forall Z[\alpha XYZ \quad \iff \quad & (X = Y = Z \vee X = Y \vee Y = Z \vee X = Z \\ & \vee \epsilon XYZ \vee \epsilon XZY \vee \epsilon YXZ \vee \epsilon YZX \vee \epsilon ZXY \vee \epsilon ZYX)]\end{aligned}$$

2 Échapper au 1er théorème de Gödel

Qu'une théorie cohérente du premier ordre T échappe au 1er théorème de Gödel signifie que son langage ne contient pas d'énoncés[3] indécidables par rapport à T, ou autrement dit, que pour tout énoncé σ de son langage, ou bien $\vdash_T \sigma$ ou bien $\vdash_T \neg\sigma$. [4] Les théories T_1, T_2 et T_3 ont cette propriété.

Corollaire.

a) Chaque T_i axiomatise son modèle naturel, c'est-à-dire que les énoncés vrais dans le modèle coïncident avec les énoncés démontrables dans T_i.
b) Tous les modèles de T_i satisfont exactement les mêmes énoncés.
c) Il y a un algorithme de démonstration automatique pour T_i.

[3] Un *énoncé* est une formule du langage sans variable libre.
[4] Quelquefois appelé *la complétude syntaxique.*

Notons que l'ordre habituel des nombres réels, $(\mathbb{R}, =, \leq)$, est aussi un modèle de T_1, et que le plan des *points algébriques*, $(\mathbb{P}_a, =, \epsilon, \delta, \alpha)$[5], est aussi un modèle de T_3.

3 Comment y échappent-elles

Nous allons illustrer, avec les T_i, un moyen de vérifier qu'une théorie T possède la propriété de *complétude syntaxique* comme à la section 2.

Ce moyen consiste à trouver un ensemble d'énoncés Σ tel que :

$(*_T)$ Pour tout énoncé σ il existe un énoncé $\sigma' \in \Sigma$ tel que

$$\vdash_T \sigma \leftrightarrow \sigma', \text{ et soit } \vdash_T \sigma', \text{ soit } \vdash_T \neg\sigma'.$$

Manifestement, la propriété $(*_T)$ assure la complétude syntaxique de T.

3.1 Ordres denses sans extrémités

Pour la théorie T_1 des ordres denses sans extrémités, il est pratique d'utiliser deux formules atomiques auxiliaires : $\top$, *le vrai*, et $\perp$, *le faux.* Soit Σ_0 l'ensemble de toutes le combinaisons booléennes de formules atomiques, on prend comme Σ l'ensemble de tous les énoncés de Σ_0, ce qui n'est rien d'autre que les combinaisons booléennes de $\top$ et $\perp$.

Langford (1927).[6] Pour toute formule $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ du langage de T_1, il existe une formule $\psi(x_1, \ldots, x_n) \in \Sigma_0$ telle que $\vdash_{T_1} \varphi \Leftrightarrow \psi$.

La propriété voulue $(*_{T_1})$ s'ensuit alors par la complétude du calcul propositionnel, puisqu'on est ramené à démontrer une tautologie du calcul propositionnel à l'aide des axiomes de ce calcul.

Esquisse du résultat de Langford. D'abord, par récurrence sur la complexité des formules et par des équivalences logiques standards, il suffit de traiter le cas où $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ est de la forme $\exists x \theta(x_1, \ldots, x_n, x)$, où $\theta(x_1, \ldots, x_n, x) \in \Sigma_0$ est une conjonction de formules atomiques ou de négations de formules

[5]Une fois fixé un repère cartésien, $\mathbb{P}_a$ consiste des points (x, y) tels que x et y sont des nombres algébriques, c.-à-d. racines d'au moins une équation algébrique à coefficients entiers. Par exemple, tout nombre rationnel, ou encore $\sqrt{2}$, ou $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ou $\sqrt[3]{2} + \sqrt{12}$ sont algébriques, mais π ne l'est pas. C'est un ensemble de même cardinal que les entiers.

[6]En quelque sorte, on *élimine les quantificateurs.*

atomiques. Considérons $n = 2$, $\varphi(x_1, x_2) : \exists x \theta(x_1, x_2, x)$. Dans θ on peut éliminer les redondances et il ne reste alors qu'une conjonction de formules atomiques distinctes ou de négations de formules atomiques distinctes, à savoir un choix parmi les 18 formules atomiques $v = w$, $v < w$, et leurs négations, où v, w se trouvent parmi x, x_1, x_2. Il suffit alors de considérer les 13 configurations possibles de x_1, x_2, x ($x_1 = x_2 = x$, $x_1 = x_2 < x$, etc.) et de prendre la disjonction de celles qui marchent pour la condition demandée (si il n'y en a aucune , on prend $\perp$). Il faut voir aussi que les axiomes de T_1 suffisent à justifier ce procédé. Par exemple, pour $\varphi(x_1, x_2) : \exists x(x < x_1 \wedge x_2 < x)$, on prend $\psi(x_1, x_2) : x_2 < x_1$; pour $\varphi(x_1, x_2) : \exists x(x_1 < x \wedge x_2 < x)$, on prend $\psi(x_1, x_2) : x_1 = x_2 \vee x_1 < x_2 \vee x_2 < x_1$ (ou encore $\top$) ; pour $\varphi(x_1, x_2) : \exists x(x_1 < x \wedge x < x_2 \wedge x_2 < x_1)$, on prend $\psi(x_1, x_2) : \perp$.

3.2 Arithmétique de Presburger

Pour la théorie T_2 de l'arithmétique de Presburger, on pose Σ_0 l'ensemble des combinaisons booléennes de formules atomiques et de formules Δ_{k,t_1,t_2} du type $\exists x(k.x + t_1 = t_2)$, où k est un entier naturel, $k.x$ est une abréviation de $x + x + \ldots + x$ où x apparaît k fois, et t_1, t_2 sont des termes du langage de T_2. La formule Δ_{k,t_1,t_2} dit que t_2 diffère de t_1 par un multiple de k. Notons que Δ_{0,t_1,t_2} est la formule $t_1 = t_2$, et Δ_{1,t_1,t_2} est équivalent à t_2 *est plus grand que* t_1 dans le modèle naturel $(\mathbb{N}, =, 0, ', +)$. On prend Σ l'ensemble des énoncés de Σ_0.

Presburger (1929). Pour toute formule $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ du langage de T_2, il existe une formule $\psi(x_1, \ldots, x_n) \in \Sigma_0$ telle que $\vdash_{T_2} \varphi \Leftrightarrow \psi$.

La propriété voulue $(*_{T_2})$ s'ensuit alors par vérification directe des énoncés du type Δ_{k,t_1,t_2} (qui sont des congruences d'entiers donnés) et la complétude du calcul propositionnel (comme le cas précédent).

3.3 Géométrie plane de Tarski

Dans le cas de la géométrie euclidienne plane de Tarski, T_3, on peut utiliser le même genre de procédé que les cas précédents, mais de façon indirecte : on passe par une théorie algébrique intermédaire qui s'obtient en *passant aux coordonnées cartésiennes*. Nous allons esquisser cet argument de Tarski (1940)[7]. On introduit un nouveau langage algébrique ayant deux

[7] Tarski affirme que ses résultats datent de 1930.

prédicats binaires $=$ et $\leq$, deux symboles de constante 0 et 1, un symbole de fonction unaire $-$, et deux symboles de fonction binaire $+$ et $\cdot$, le modèle naturel étant les nombres réels avec l'interprétation habituelle des symboles $(\mathbb{R}, =, \leq, 0, 1, -, +, \cdot)$. La nouvelle théorie T_4 est celle des corps d'Artin-Schreier (ou corps réel clos) dont voici les axiomes :

AXIOMES DE CORPS D'ARTIN-SCHREIR OU RÉEL CLOS

(Axiomes d'égalité)

(1) $\forall x_1(x_1 = x_1)$

(2) Pour chaque formule atomique $\mathcal{A}(x)$,
$\forall x_1 \forall x_2(x_1 = x_2 \Rightarrow (\mathcal{A}(x_1) \Leftrightarrow \mathcal{A}(x_2))$

(Axiomes de corps ordonné)

(3) $0 \neq 1$

(4) $\forall x_1(x_1 + 0 = x_1)$

(5) $\forall x_1 \forall x_2(x_1 + x_2 = x_2 + x_1)$

(6) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3((x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3))$

(7) $\forall x_1(x_1 + (-x_1) = 0)$

(8) $\forall x_1(x_1 \cdot 1 = x_1)$

(9) $\forall x_1 \forall x_2(x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1)$

(10) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 = x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3))$

(11) $\forall x_1(x_1 \neq 0 \Rightarrow \exists x_2(x_1 \cdot x_2 = 1))$

(12) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3(x_1 \cdot (x_2 + x_3) = (x_1 \cdot x_2) + (x_1 \cdot x_3))$

(13) $0 \leq 1$

(14) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3((x_1 \leq x_2 \wedge x_2 \leq x_3) \Rightarrow x_1 \leq x_3)$

(15) $\forall x_1 \forall x_2((x_1 \leq x_2 \wedge x_2 \leq x_1) \Rightarrow x_1 = x_2)$

(16) $\forall x_1 \forall x_2(x_1 \leq x_2 \vee x_1 = x_2 \vee x_2 \leq x_1)$

(17) $\forall x_1 \forall x_2((0 \leq x_1 \wedge 0 \leq x_2) \Rightarrow (0 \leq x_1 + x_2 \wedge 0 \leq x_1 \cdot x_2))$

(Axiomes de continuité)

(18) Pour chaque terme $t(x)$,
$\forall x_1 \forall x_2((x_1 \leq x_2 \wedge x_1 \neq x_2 \wedge t(x_1) \cdot t(x_2) \leq 0 \wedge t(x_1) \cdot t(x_2) \neq 0)$
$\Rightarrow \exists x_3(x_1 < x_3 \wedge x_3 < x_2 \wedge t(x_3) = 0))$

Il s'agit d'abord de voir qu'on peut traduire fidèlement les formules géométriques en formules algébriques en introduisant les coordonnées cartésiennes. Dans ce qui suit, $x - y$ est une abréviation de $x + (-y)$.

TRADUCTION DES FORMULES GÉOMÉTRIQUES EN FORMULES ALGÉBRIQUES

1) à chaque variable géométrique $X, Y, \ldots$ on associe un couple de variables algébriques $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \ldots$
2) on remplace $X = Y$ par $(x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2)$
3) on remplace $\alpha(X, Y, Z)$ par $(y_2 - x_2) \cdot (z_1 - x_1) = (z_2 - y_2) \cdot (y_1 - x_1)$
4) on remplace $\epsilon(X, Y, Z)$ par

$$\begin{array}{lll}
(x_1 \neq z_1 \vee x_2 \neq z_2) & \wedge & (y_2 - x_2) \cdot (z_1 - x_1) = (z_2 - y_2) \cdot (y_1 - x_1) \\
& \wedge & (x_1 \leq y_1 \wedge y_1 \leq z_1 \wedge x_2 \leq y_2 \wedge y_2 \leq z_2 \\
& & \vee \\
& & z_1 \leq y_1 \wedge y_1 \leq x_1 \wedge z_2 \leq y_2 \wedge y_2 \leq x_2 \\
& & \vee \\
& & x_1 \leq y_1 \wedge y_1 \leq z_1 \wedge z_2 \leq y_2 \wedge y_2 \leq x_2 \\
& & \vee \\
& & z_1 \leq y_1 \wedge y_1 \leq x_1 \wedge x_2 \leq y_2 \wedge y_2 \leq z_2)
\end{array}$$

5) on remplace $\delta(X, Y, A, B)$ par

$$(x_1 - y_1) \cdot (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) \cdot (x_2 - y_2) = (a_1 - b_1) \cdot (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) \cdot (a_2 - b_2)$$

6) on laisse les connecteurs propositionnels inchangés
7) on remplace $\forall X$ par $\forall x_1 \forall x_2$ et $\exists X$ par $\exists x_1 \exists x_2$

$<<$ **Descartes** $>>$**.** Pour toute formule géométrique F, il existe une formule algébrique F^* telle que $\vdash_{T_3} F$ si et seulement si $\vdash_{T_4} F^*$.

Tarski (1931). Soit Σ_0 l'ensemble des combinaisons booléennes de formules atomiques du langage de T_4, alors pour toute formule $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ du langage de T_4, il existe une formule $\psi(x_1, \ldots, x_n) \in \Sigma_0$ telle que $\vdash_{T_4} \varphi \Leftrightarrow \psi$.

La propriété voulue $(*_{T_4})$ s'ensuit alors par vérification directe des énoncés atomiques $t_1 = t_2$, $t_1 \leq t_2$ (qui sont des égalités ou inégalités d'entiers donnés), et la complétude du calcul propositionnel. La traduction entre géométrie et algèbre assure alors que T_3 échappe aussi au 1er théorème d'incomplétude.

N.B. Le résultat de Tarski sur la théorie T_4 peut sembler limité. Mais son contenu géométrique est très riche comme l'a démontré tout le travail entourant la notion de structure o-minimale (voir van den Dries (1998)). En particulier, plusieurs propriétés géométriques clés analogues sont maintenant connues pour des structures incluant des fonctions analytiques réelles, notamment la fonction exponentielle, à l'origine de tout ce développement (ibid.). Le résultat de Tarski entraîne la décidabilité de $(\mathbb{R}, =, \leq, 0, 1, -, +, \cdot)$, c'est-à-dire qu'il existe un algorithme qui permet de décider si un énoncé quelconque est vrai ou non dans cette structure. Or Tarski posa tout de suite la question de la décidabilité de $(\mathbb{R}, =, \leq, 0, 1, -, +, \cdot, \exp)$, où exp désigne la fonction exponentielle. L'état actuel de la question, suite aux travaux sur les structures o-minimales, est un résultat de Macintyre et Wilkie (1996)[8], qui montre que la décidabilité de $(\mathbb{R}, =, \leq, 0, 1, -, +, \cdot, \exp)$ découle de la conjecture de Schanuel, une conjecture en théorie des nombres transcendants portant sur des nombres de la forme $\exp(a)$.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- L. van den Dries, 1998. *Tame topology and o-minimal structures*, Cambridge U. Press.
- C. H. Langford, 1927. Some theorems on deducibility, Annals of Mathematics 28, pp. 16-40.
- A. Macintyre & A. Wilkie, 1996. On the decidability of the real exponential field, in *Kreiseliana*, Odifreddi et al., A. K. Peters.
- M. Presburger, 1929. Ueber die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen in welchen die addition als einzige Operation hervortritt, in *Sprawozdanie z I Kongresu Matematyków Krajów Slowiánskich (Comptes rendus, 1er Congrès des mathématiciens des pays slaves)*, Varsovie, pp. 192-201.
- A. Tarski, 1931. Sur les ensembles définissables de nombres réels, Fundamenta Mathematicae 17, pp. 210-239. (*Collected works, vol. 1*)
- , 1940. *The completeness of elementary algebra and geometry*, C.N.R.S. Institut Blaise Pascal, 1967. (*Collected works, vol. 4*). N.B. Les épreuves ne purent être imprimées à Paris en 1940 par l'éditeur Hermann. Tarski remania le texte qui parut en 1948 sous le titre *A decision method for elementary algebra and geometry*, Rand Corporation, Santa Monica, puis en une seconde édition en 1951 par l'Université Berkeley.
- , 1959. What is elementary geometry ?, in *The axiomatic method*, Henkin et al., North-Holland, pp. 16-29. (*Collected works, vol. 4*)
- A. Wilkie, 1997. Schanuel's conjecture and the decidability of the real exponential field, in *Algebraic model theory (Toronto, ON, 1996)*, Kluwer, pp. 223-230.

[8]Voir Wilkie (1997) pour un exposé plus abordable.