ARITHMÉTISATION DE LA SYNTAXE : LA NUMÉROTATION DE GÖDEL

MATHIEU BÉLANGER

1. L'idée d'arithmétisation

Soit K une théorie du premier ordre. L'objectif sous-jacent à l'arithmétisation proposée par Gödel consiste à encoder les énoncés métamathématiques à propos de la théorie K de façon à pouvoir les remplacer par des formules arithmétiques, formules qui pourront elles-mêmes être exprimées dans la théorie K. Autrement dit, il est dorénavant possible d'exprimer les propriétés métamathématiques de la théorie K dans K elle-même. Une arithmétisation se définit de la façon suivante :

Définition. Une *arithmétisation* d'une théorie K est une fonction monomorphique g de l'ensemble des symboles, expressions et suites finies d'expressions de K vers l'ensemble des entiers positifs qui vérifie les conditions suivantes :

(1) g est effectivement calculable ;

(2) il y a une procédure effective pour déterminer si un entier positif m est dans l'image de la fonction g et, le cas échéant, cette procédure permet de trouver l'objet x tel que $g(x) = m$.

Dans la perspective du premier théorème d'incomplétude de Gödel, l'idée d'arithmétisation a pour aboutissement son application à la théorie arithmétique formelle S et au langage $\mathcal{L}_A$. Plus généralement, la démarche de Gödel peut être décrite comme suit. La première étape consiste à définir une fonction d'arithmétisation qui associera à tout symbole du langage de K un nombre entier positif. La seconde consiste à traduire les énoncés du métalangage de K en des formules arithmétiques.

2. La numérotation de Gödel

Le langage $\mathcal{L}_K$ d'une théorie K du premier ordre fut défini à l'aide de symboles primitifs. À titre de rappel, ce langage est formé de :

- symboles de connecteurs : $\neg$ et $\Rightarrow$;
- symbole de quantificateur : $\forall$;
- symboles de ponctuation : (,) et , ;
- symboles de variables : $x_1, x_2, x_3, \dots$;
- un nombre au plus dénombrable, mais non nul de symboles de constantes : $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$;
- un nombre au plus dénombrable de symboles de fonctions : f_k^n (k, n des entiers positifs) ;
- un nombre au plus dénombrable de symboles de prédicats : A_k^n (k, n des entiers positifs).

Présenté au Séminaire de logique, UQAM, 24 février 2006.

Référence : Elliot Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*, 4e édition, §3.4, p. 190-200.

La fonction g sous-jacente à l'arithmétisation devra être définie de façon à traiter les symboles du langage $\mathcal{L}_K$, mais aussi les expressions et suites finies d'expressions qui peuvent être formées à partir de ces derniers. De plus, cette fonction devra associer des nombres différents à des objets différents.

2.1. **Les symboles primitifs.** Dans un premier ordre d'idées, la fonction g associe à tout symbole de K un entier positif $g(u)$ – son nombre de Gödel — comme suit :
- $g(() = 3$
- $g()) = 5$
- $g(,) = 7$
- $g(\neg) = 9$
- $g(\Rightarrow) = 11$
- $g(\forall) = 13$
- $g(x_k) = 13 + 8k \ (k \geq 1)$
- $g(a_k) = 7 + 8k \ (k \geq 1)$
- $g(f_k^n) = 1 + 8(2^n 3^k) \ (k, n \geq 1)$
- $g(A_k^n) = 3 + 8(2^n 3^k) \ (k, n \geq 1)$

Ainsi, à chaque symbole u du langage de K correspond un entier positif impair. En effet, les nombres 3, 5, 7, 9, 11 et 13 sont évidemment impairs. Les nombres $13+8k$, $7+8k$, $1+8(2^n3^k)$ et $3+8(2^n3^k)$ seront quant à eux impairs si et seulement si $8k$ et $8(2^n3^k)$ le sont eux-mêmes dans la mesure où la somme de deux entiers positifs est impaire lorsque ceux-ci sont de parité différente. Or, $8k$ et $8(2^n3^k)$ sont tous deux pairs car divisible par 2.

De plus, la fonction g est monomorphique, c'est-à-dire qu'elle associe des nombres de Gödel $g(u)$ différents à des symboles u différents. Premièrement, il va de soi que 3, 5, 7, 9, 11 et 13 sont tous différents l'un de l'autre. Deuxièmement, les nombres $13+8k$, $7+8k$, $1+8(2^n3^k)$ et $3+8(2^n3^k)$ sont différents de 3, 5, 7, 9, 11 et 13 car $k, n \geq 1$. Troisièmement, $13+8k$, $7+8k$, $1+8(2^n3^k)$ et $3+8(2^n3^k)$ sont également tous différents l'un de l'autre parce que différents relativement à la division $\bmod 8$.

2.2. **Les expressions.** Dans un deuxième ordre d'idées, la fonction g fait correspondre à toute expression $u_0u_1 \dots u_r$ formée des symboles $u_0, u_1, \dots, u_r$ un nombre entier positif $g(u_0u_1 \dots u_r)$, son nombre de Gödel, de la façon suivante :

$$g(u_0u_1 \dots u_r) = 2^{g(u_0)} 3^{g(u_1)} \dots p_r^{g(u_r)}$$

où p_j est le j^{e} nombre premier avec $p_0 = 2$.

La fonction g est monomorphique relativement aux expressions de la théorie K. À des expressions différentes correspondent des nombres de Gödel différents en raison du théorème fondamental de l'arithmétique qui stipule l'unicité de la factorisation des entiers en puissances de nombres premiers.

De plus, les symboles et les expressions de la théorie K ont des nombres de Gödel différents. Contrairement aux symboles dont les nombres de Gödel sont impairs, les expressions ont des nombres de Gödel pairs. En effet, $2^{g(u_0)}$ étant pair parce que divisible par 2, le nombre de Gödel $2^{g(u_0)} 3^{g(u_1)} \dots p_r^{g(u_r)}$ associé à une expression $u_0u_1 \dots u_r$ sera pair.

Conséquemment, la fonction g permet de discriminer entre l'utilisation d'un symbole en tant que tel ou en tant qu'expression. En effet, une expression peut être formée d'un unique symbole u. Or, la parité de ce symbole variera selon qu'il soit utilisé en tant que symbole ou en tant qu'expression.

2.3. **Les suites finies d'expressions.** Dans un troisième ordre d'idées, à toute suite finie d'expressions $e_0, e_1, \ldots, e_r$ de K correspond un nombre entier positif $g(e_0, e_1, \ldots, e_r)$, son nombre de Gödel, défini de la façon suivante :

$$g(e_0, e_1, \ldots, e_r) = 2^{g(e_0)}3^{g(e_1)} \ldots p_r^{g(e_r)}$$

où p_j désigne le j^{e} nombre premier.

La fonction g est monomorphique relativement aux suites d'expressions, c'est-à-dire que des suites d'expressions différentes ont des nombres de Gödel différents, et ce toujours en raison du théorème fondamental de l'arithmétique.

De plus, le nombre de Gödel d'une suite finie d'expressions est différent des nombres de Gödel associés à des symboles ou expressions. D'une part, tout symbole u a un nombre de Gödel impair, mais le nombre de Gödel associé à une suite finie d'expression $e_0, e_1, \ldots, e_r$ est nécessairement pair en raison du facteur $2^{g(e_0)}$. D'autre part, les nombres de Gödel associés à une expression $u_0u_1 \ldots u_r$ et à une suite finie d'expressions $e_0, e_1, \ldots e_r$ sont tous deux pairs en raison de leur premier facteur qui est une puissance de 2, c'est-à-dire $2^{g(u_0)}$ et $2^{g(e_0)}$ respectivement. Dans le cas d'une expression, cet exposant correspond toutefois au nombre de Gödel d'un symbole et est donc impair. À l'opposé, il est pair dans le cas d'une suite d'expressions puisqu'il correspond au nombre de Gödel d'une expression.

Conséquemment, la fonction g permet également de distinguer entre un symbole utilisé en tant que symbole, expression ou suite finie d'expressions.

Exemple. Trouver les nombres de Gödel qui correspondent aux symboles x_2 et A_1^1 ainsi qu'à l'expression $f_1^1(a_1)$

(1) x_2

x_2 est un symbole de variable. Son nombre de Gödel est donc de la forme $g(x_k) = 13 + 8k$ avec $k = 2$.

$$\begin{aligned} g(x_2) &= 13 + 8 \cdot 2 \\ &= 13 + 16 \\ &= 29 \end{aligned}$$

(2) A_2^1

A_2^1 est un symbole de prédicat. Son nombre de Gödel est de la forme $g(A_k^n) = 3 + 8(2^n 3^k)$ avec $k = 2$ et $n = 1$.

$$\begin{aligned} g(A_2^1) &= 3 + 8(2^1 3^2) \\ &= 3 + 8(2 \cdot 9) \\ &= 3 + 144 \\ &= 147 \end{aligned}$$

(3) $f_1^1(a_1)$

$f_1^1(a_1)$ est une expression composée de la suite de symboles f_1^1, (, a_1 et). Son nombre de Gödel est de la forme $g(u_0u_1u_2u_3) = 2^{g(u_0)}3^{g(u_1)}5^{g(u_2)}7^{g(u_3)}$ avec $u_0 = f_1^1$, $u_1 =$ (, $u_2 = a_1$ et $u_3 =$).

$$\begin{aligned} g(f_1^1(a_1)) &= 2^{g(f_1^1)}3^{g(()}5^{g(a_1)}7^{g())} \\ &= 2^{1+8(2^1 3^1)}3^3 5^{7+8(1)} 7^5 \\ &= 2^{49}3^3 5^{15} 7^5 \end{aligned}$$

Exemple. Trouver les objets ayant les nombres de Gödel suivants :

(1) 1944

1944 étant un nombre entier positif pair, l'objet auquel il correspond n'est pas un symbole. Sa décomposition en puissances de nombres premiers est la suivante :

$$\begin{aligned} 1944 &= 2 \cdot 972 \\ &= 2^3 \cdot 3 \cdot 81 \\ &= 2^3 \cdot 3^5 \end{aligned}$$

Le facteur 2^3 ayant un exposant impair, ce nombre de Gödel correspond à une expression. 1944 est donc un nombre de Gödel de la forme $2^{g(u_0)}u^{g(u_1)}$. Or, $g(() = 3$ et $g()) = 5$. Donc, l'expression ayant le nombre de Gödel 1944 est ().

(2) 49

49 étant impair, l'objet auquel il correspond est un symbole. Or,

$$\begin{aligned} 49 &= 1 + 48 \\ &= 1 + 8 \cdot 6 \\ &= 1 + 8(2^1 3^1) \end{aligned}$$

49 est donc le nombre de Gödel du symbole de fonction f_1^1.

(3) 15

15 étant un nombre impair, il est le nombre de Gödel d'un symbole.

$$\begin{aligned} 15 &= 7 + 8 \\ &= 7 + 8 \cdot 1 \end{aligned}$$

15 est donc le nombre de Gödel de la constante a_1.

(4) 13824

13824 étant pair, ce nombre Gödel est associé à une expression ou à une suite finie d'expressions. Sa factorisation en puissances de nombres premiers est la suivante :

$$\begin{aligned} 13824 &= 2 \cdot 6912 \\ &= 2^2 \cdot 3456 \\ &= 2^9 \cdot 27 \\ &= 2^9 \cdot 3^3 \end{aligned}$$

9 étant impair, il s'agit du nombre de Gödel d'une expression. Or, $g(\neg) = 9$ et $g(() = 3$. Donc, 13824 correspond à l'expression $\neg($.

(5) $2^{51}3^{11}5^9$

$$\begin{aligned} 2^{51}3^{11}5^9 &= 2^{3+48}3^{11}5^9 \\ &= 2^{3+8(2^1 \cdot 3^1)}3^{11}5^9 \end{aligned}$$

Or, $g(A_1^1) = 3+8(2^1 3^1)$, $g(\Rightarrow) = 11$ et $g(\neg) = 9$. Donc, le nombre de Gödel $2^{51}3^{11}5^9$ correspond à l'expression $A_1^1 \Rightarrow \neg$.

Exemple. Montrer que si n est impair, alors $4n$ n'est pas un nombre de Gödel.

Démonstration. Soit n un entier positif impair. Si $4n$ est un nombre de Gödel, alors ce nombre est associé à une expression ou suite finie d'expressions puisque $4n$ est nécessairement pair. Or, n étant impair, sa factorisation en puissances de nombres premiers ne contient aucune puissance de 2. La décomposition de $4n$ sera donc de la forme :

$$4n = 2^2 \cdot n$$

2^2 ayant un exposant pair, $4n$ doit être le nombre de Gödel d'une suite finie d'expressions $e_0, e_1, \dots, e_r$. La forme générale du nombre de Gödel d'une telle suite est $2^{g(e_0)} 3^{g(e_1)} \dots p_r^{g(e_r)}$. Ainsi, $g(e_0) = 2 = 2^1$ ce qui est impossible puisque 1 n'est le nombre de Gödel d'aucun symbole. □

3. L'arithmétisation du métalangage

En utilisant les nombres de Gödel introduits précédemment, les expressions du métalangage — c'est-à-dire les expressions utilisées pour parler des propriétés métamathématiques de la théorie K — peuvent être traduites en des expressions arithmétiques qui auront un sens dans K.

Définition. Une théorie K a un *vocabulaire récursif primitif* si les propriétés suivantes sont récursives primitives :

(a) $\mathrm{IC}(x)$: x est le nombre de Gödel d'une constante d'individu de K ;

(b) $\mathrm{FL}(x)$: x est le nombre de Gödel d'un symbole de fonction de K ;

(c) $\mathrm{PL}(x)$: x est le nombre de Gödel d'un symbole de prédicat de K.

Remarque. Toute théorie K ayant un nombre fini de constantes d'individus, de symboles de fonctions et de symboles de prédicats a un vocabulaire récursif primitif. Il suffit de remarquer que les ensembles de constantes, de symboles de fonctions et de symboles de prédicats peuvent être énumérés. Par exemple, étant donnée une théorie K dont les constantes d'individus sont $a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_n}$, alors $\mathrm{IC}(x)$ si et seulement si $x = 7 + 8j_1 \vee x = 7 + 8j_2 \vee \dots \vee x = 7 + 8j_n$.

Toute théorie K dans le langage $\mathcal{L}_A$ de l'arithmétique a conséquemment un vocabulaire récursif primitif. En particulier, S a donc un vocabulaire récursif primitif.

Rappel.

(1) Soit x un nombre entier positif tel que $x = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$, son unique factorisation en puissances de nombres premiers. $(x)_j$ est la fonction qui renvoie l'exposant a_j du j^{e} nombre premier. Si $x = 0$, alors $(x)_j = 0$.

(2) lh est la fonction longueur. Étant donnée un nombre entier positif, $lh(x)$ renvoie le nombre d'exposants non nuls dans la décomposition en nombres premiers de x. Par exemple, étant donné $x = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$, $lh(x) = k$.

(3) $*$ est la fonction juxtaposition. Cette fonction représente à l'aide d'un nombre entier positif une suite d'entiers positifs obtenue en juxtaposant deux telles suites. Soient $a_0, a_1, \dots, a_k$ et $b_0, b_1, \dots, b_m$ deux suites de nombres entiers. Elles peuvent respectivement être représentées par un nombre entiers positifs en posant $x = 2^{a_0} 3^{a_1} \dots p_k^{a_k}$ et $y = 2^{b_0} 3^{b_1} \dots p_m^{b_m}$. La suite $a_0, a_1, \dots, a_k, b_0, b_1, \dots, b_m$ obtenue par juxtaposition et peut elle-même être représentée par le nombre $x * y = 2^{a_0} 3^{a_1} \dots p_k^{a_k} p_{k+1}^{b_0} p_{k+2}^{b_1} \dots p_{k+1+m}^{b_m}$.

Ces trois fonctions sont récursives primitives et seront utilisées dans les démonstrations à venir.

Proposition (3.26[1])**.** *Soit K une théorie avec un vocabulaire récursif primitif. Les relations et fonctions suivantes sont primitives récursives.*

(1) $\mathrm{EVbl}(x)$ *: x est le nombre de Gödel d'une expression formée d'une variable*[2].

Soit e_0 une expression formée d'une seule variable, x_k par exemple. Alors, x est le nombre de Gödel de e_0 si et seulement si

$$\begin{aligned} x &= g(e_0) \\ &= 2^{g(x_k)} \\ &= 2^{13+8k}(k \geq 1) \end{aligned}$$

Ainsi, x est le nombre de Gödel de l'expression e_0 si et seulement s'il existe un entier positif z plus grand que 1 tel que $x = 2^{13+8z}$. La formule récursive primitive ci-dessous peut donc être associée à la relation $\mathrm{EVbl}(x)$ *:*

$$(\exists z)_{z<x}(1 \leq z \wedge x = 2^{13+8z})$$

$\mathrm{EIC}(x)$ *: x est le nombre de Gödel d'une expression formée d'une constante d'individu.*

Soit e_0 *une expression composée d'une seule constante d'individu, a_k par exemple. x est le nombre de Gödel de cette expression si et seulement s'il existe un nombre $y < x$ tel que* $\mathrm{IC}(y)$ *et*

$$\begin{aligned} x &= g(e_0) \\ &= 2^{g(a_k)} \\ &= 2^y \end{aligned}$$

La formule récursive primitive suivante peut alors être associée à la relation $\mathrm{EIC}(x)$ *:*

$$(\exists y)_{y<x}(\mathrm{IC}(y) \wedge x = 2^y)$$

$\mathrm{EFL}(x)$ *: x est le nombre de Gödel d'une expression formée d'un symbole de fonction.*

$$(\exists y)_{y<x}(\mathrm{FL}(y) \wedge x = 2^y)$$

$\mathrm{EPL}(x)$ *: x est le nombre de Gödel d'une expression formée d'un symbole de prédicat.*

$$(\exists y)_{y<x}(\mathrm{PL}(y) \wedge x = 2^y)$$

(2) $\mathrm{Arg_T}(x) = (\mathrm{qt}(8, x \dot{-} 1))_0$ *: si x est le nombre de Gödel d'un symbole de fonction f_j^n, alors* $\mathrm{Arg_T}(x) = n$.

$\mathrm{Arg_P}(x) = (\mathrm{qt}(8, x \dot{-} 3))_0$ *: si x est le nombre de Gödel d'un symbole de prédicat A_j^n, alors* $\mathrm{Arg_P}(x) = n$.

---

[1] La numérotation des propositions varie d'une édition à l'autre. Celle de la quatrième édition sera suivie.

[2] Pour la plupart des autres relations, les étapes menant à la formule seront omises et seule celle-ci sera présentée.

(3) $\mathrm{Gd}(x)$ *: x est le nombre de Gödel d'une expression de K.*

Une expression e_0 de K est un symbole de K ou une suite finie de symboles de K. x est donc le nombre de Gödel d'une expression de K si et seulement si x est le nombre de Gödel d'un symbole ou x est le nombre de Gödel d'une suite finie de symboles de K. Trois possibilités se présentent :

(i) x est le nombre de Gödel de (,), ,, $\neg$, $\Rightarrow$ ou $\forall$. Dans ce cas,

$$x = 2^{g(()} \vee x = 2^{g())} \vee x = 2^{g(,)} \vee x = 2^{g(\neg)} \vee x = 2^{g(\Rightarrow)} \vee x = 2^{g(\forall)}$$

$$x = 2^3 \vee x = 2^5 \vee x = 2^7\ lor x = 2^9 \vee x = 2^{11} \vee x = 2^{13}$$

(ii) x est le nombre de Gödel d'une variable, d'une constante d'individu, d'un symbole de fonction ou d'un symbole de prédicat. Dans ce cas,

$$\mathrm{EVbl}(x) \vee \mathrm{EIC}(x) \vee \mathrm{EFL}(x) \vee \mathrm{EPL}(x)$$

(iii) x est le nombre de Gödel d'une suite finie de symboles, $u_0u_1 \dots u_r$ par exemple. Dans ce cas, il existe des nombres entiers positifs u et v de telle sorte que u et v soient les nombres de Gödel de deux sous-expressions de $u_0u_1 \dots u_r$. Alors, en utilisant la fonction juxtaposition,

$$(\exists u)_{u<x}(\exists v)_{v<x}(x = u * v \wedge \mathrm{Gd}(u) \wedge \mathrm{Gd}(v))$$

D'où la formule récursive primitive associée à $\mathrm{Gd}(x)$ *:*

$$\begin{aligned}&\mathrm{EVbl}(x) \vee \mathrm{EIC}(x) \vee \mathrm{EFL}(x) \vee \mathrm{EPL}(x) \vee \\ &x = 2^3 \vee x = 2^5 \vee x = 2^7 \vee x = 2^9 \vee x = 2^{11} \vee x = 2^{13} \vee \\ &(\exists u)_{u<x}(\exists v)_{v<x}(x = u * v \wedge \mathrm{Gd}(u) \wedge \mathrm{Gd}(v))\end{aligned}$$

(4) $\mathrm{MP}(x, y, z)$ *: l'expression qui a pour nombre de Gödel z est une conséquence directe par modus ponens d'expressions ayant x et y comme nombres de Gödel.*

$$y = 2^3 * x * 2^{11} * z * 2^5 \wedge \mathrm{Gd}(x) \wedge \mathrm{Gd}(z)$$

(5) $\mathrm{Gen}(x, y)$ *: l'expression qui a pour nombre de Gödel y s'obtient par la règle de généralisation à partir de l'expression ayant pour nombre de Gödel x.*

$$(\exists v)_{v<y}(\mathrm{EVbl}(v) \wedge y = 2^3 * 2^3 * 2^{13} * v * 2^5 * x * 2^5 * \mathrm{Gd}(x))$$

(6) $\mathrm{Trm}(x)$ *: x est le nombre de Gödel d'un terme de K.*

$$\begin{aligned}&\mathrm{EVbl}(x) \vee \mathrm{EIC}(x) \vee (\exists y)_{y<(p_x!)^x}[x = (y)_{lh(y)\dot{-}1} \wedge \\ &lh(y) = \mathrm{Arg_T}((x)_0) + 1 \wedge \mathrm{FL}(((y)_0)_0) \wedge ((y)_0)_1 = 3 \wedge \\ &lh((y)_0) = 2 \wedge (\forall u)_{u<lh(y)\dot{-}2}(\exists v)_{v<x}((y)_{u+1} = (y)_u * v * 2^7 \wedge \\ &\mathrm{Trm}(v)) \wedge (\exists v)_{v<x}((y)_{lh(y)\dot{-}1} = (y)_{lh(y)\dot{-}2} * v * 2^5 \wedge \mathrm{Trm}(v))]\end{aligned}$$

(7) $\mathrm{Atfml}(x)$ *: x est le nombre de Gödel d'une formule bien formée atomique de K,*

$$\begin{aligned}&(\exists y)_{y<(p_x!)^x}[x = (y)_{lh(y)\dot{-}1} \wedge lh(y) = \mathrm{Arg_P}((x)_0) + 1 \wedge \\ &\mathrm{PL}(((y)_0)_0) \wedge ((y)_0)_1 = 3 \wedge lh((y)_0) = 2 \wedge \\ &(\forall u)_{u<lh(y)\dot{-}2}(\exists v)_{v<x}((y)_{u+1} = (y)_u * v * 2^7 \wedge \mathrm{Trm}(v)) \wedge \\ &(\exists v)_{v<x}((y)_{lh(y)\dot{-}1} = (y)_{lh(y)\dot{-}2} * v * 2^5 \wedge \mathrm{Trm}(v))]\end{aligned}$$

(8) $\mathrm{Fml}(y)$ *: y est le nombre de Gödel d'une formule de K.*

$$\mathrm{Atfml}(y) \vee (\exists z)_{z<y}[(\mathrm{Fml}(z) \wedge y = 2^3 * 2^9 * z * 2^5) \vee$$
$$(\mathrm{Fml}((z)_0) \wedge \mathrm{Fml}((z)_1) \wedge y = 2^3 * (z)_0 * 2^{11} * (z)_1 * 2^5) \vee$$
$$(\mathrm{Fml}((z)_0) \wedge \mathrm{EVbl}((z)_1) \wedge y = 2^3 * 2^3 * 2^{13} * (z)_1 * 2^5 * (z)_0 * 2^5)]$$

(9) $\mathrm{Subst}(x, y, u, v)$ *: x est le nombre de Gödel du résultat de la substitution dans une expression dont le nombre de Gödel est y de toutes les occurrences libres de la variable ayant pour nombre de Gödel v par le terme dont le nombre de Gödel est u.*

$$\mathrm{Gd}(y) \wedge \mathrm{Trm}(u) \wedge \mathrm{EVbl}(2^v) \wedge [(y = 2^v \wedge x = u) \vee$$
$$(\exists w)_{w<y}(y = 2^w \wedge y \neq 2^v \wedge x = y) \vee$$
$$(\exists z)_{z<y}(\exists w)_{w<y}(\mathrm{Fml}(w) \wedge y = 2^3 * 2^{13} * 2^v * 2^5 * w * z \wedge$$
$$(\exists \alpha)_{\alpha<x}(x = 2^3 * 2^{13} * 2^v * 2^5 * w * \alpha \wedge \mathrm{Subst}(\alpha, z, u, v))) \vee$$
$$((\neg(\exists z)_{z<y}(\exists w)_{w<y}(\mathrm{Fml}(w) \wedge y = 2^3 * 2^{13} * 2^v * 2^5 * w * z)) \wedge$$
$$(\exists \alpha)_{\alpha<x}(\exists \beta)_{\beta<x}(\exists z)_{z<y}(1 < z \wedge y = 2^{(y)_0} * z \wedge x = \alpha * \beta \wedge$$
$$\mathrm{Subst}(\alpha, 2^{(y)_0}, u, v) \wedge \mathrm{Subst}(\beta, z, u, v)))]$$

(10) $\mathrm{Sub}(y, u, v)$ *: le nombre de Gödel du résultat de la substitution dans une expression dont le nombre de Gödel est y de toutes les occurrences libres de la variables dont le nombre de Gödel est v par le terme dont le nombre de Gödel est u.*

$$\mathrm{Sub}(y, u, v) = \mu x_{x<(p_{uy}!)^{uy}} \mathrm{Subst}(u, y, u, v)$$

(11) $\mathrm{Fr}(y, v)$ *: y est le nombre de Gödel d'une formule bien formée ou d'un terme de K qui contient une occurrence libre de la variable dont le nombre de Gödel est v.*

$$(\mathrm{Fml}(y) \vee \mathrm{Trm}(y)) \wedge \mathrm{EVbl}(2^v) \wedge \neg\mathrm{Subst}(y, y, 2^{13+8k}, v)$$

(12) $\mathrm{Ff}(u, v, w)$ *: u est le nombre de Gödel d'un terme qui, dans la formule bien formée ayant w comme nombre de Gödel, ne contient que des occurrences libres de la variable dont le nombre de Gödel est v.*

$$\mathrm{Trm}(u) \wedge \mathrm{EVbl}(2^v) \wedge \mathrm{Fml}(w) \wedge [\mathrm{Atfml}(w) \wedge$$
$$(\exists y)_{y<w}(w = 2^3 * 2^9 * y * 2^5 \wedge \mathrm{Ff}(u, v, y)) \vee$$
$$(\exists y)_{y<w}(\exists z)_{z<w}(w = 2^3 * y * 2^{11} * z * 2^5 \wedge \mathrm{Ff}(u, v, y) \wedge \mathrm{Ff}(u, v, z)) \vee$$
$$(\exists y)_{y<w}(\exists z)_{z<w}(w = 2^3 * 2^3 * 2^{13} * 2^z * 2^5 * y * 2^5 \wedge \mathrm{EVbl}(2^z) \wedge$$
$$(z \neq v \Rightarrow \mathrm{Ff}(u, v, y) \wedge (\mathrm{Fr}(u, z) \Rightarrow \neg\mathrm{Fr}(y, v))))]$$

(13) *(a)* $\mathrm{Ax}_1(x)$ *: x est le nombre de Gödel d'une instance du schéma d'axiome (A1).*

Le schéma d'axiome (A1) affirme que pour toutes formules $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$,

$$(\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow B))$$

Donc, x sera le nombre de Gödel d'une instance du schéma d'axiome (A1) si et seulement si deux telles formules ont chacune un nombre de

Gödel, c'est-à-dire si et seulement $(\exists u)_{u<x}\mathrm{Fml}(u)$ *et* $(\exists v)_{v<x}\mathrm{Fml}(v)$, *et*

$$\begin{aligned} x &= g((\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow B))) \\ &= 2^3 * u * 2^{11} * 2^3 * v * 2^{11} * u * 2^5 * 2^5. \end{aligned}$$

Donc, la formule récursive primitive suivante est associée à la propriété $\mathrm{Ax}_1(\mathrm{x})$ *:*

$$\begin{aligned} &(\exists u)_{u<x}(\exists v)_{v<x}(\mathrm{Fml}(u) \wedge \mathrm{Fml}(v) \wedge \\ &x = 2^3 * u * 2^{11} * 2^3 * v * 2^{11} * u * 2^5 * 2^5) \end{aligned}$$

(b) $\mathrm{Ax}_2(x)$ *: x est le nombre de Gödel d'une instance du schéma d'axiome (A2).*

$$\begin{aligned} &(\exists u)_{u<x}(\exists v)_{v<x}(\exists w)_{w<x}(\mathrm{Fml}(u) \wedge \mathrm{Fml}(v) \wedge \mathrm{Fml}(w) \wedge \\ &x = 2^3 * 2^3 * u * 2^{11} * 2^3 * v * 2^{11} * w * 2^5 * 2^{11} * 2^3 * \\ &2^3 * u * 2^{11} * v * 2^5 * 2^{11} * 2^3 * u * 2^{11} * w * 2^5 * 2^5 * 2^5) \end{aligned}$$

(c) $\mathrm{Ax}_3(x)$ *: x est le nombre de Gödel d'une instance du schéma d'axiome (A3).*

$$\begin{aligned} &(\exists u)_{u<x}(\exists v)_{v<x}(\mathrm{Fml}(u) \wedge \mathrm{Fml}(v) \wedge \\ &x = 2^3 * 2^3 * 2^3 * 2^9 * v * 2^5 * 2^{11} * 2^3 * 2^9 * u * 2^5 * 2^5 * \\ &2^{11} * 2^3 * 2^3 * 2^9 * v * 2^5 * 2^{11} * u * 2^5 * 2^{11} * v * 2^5 * 2^5) \end{aligned}$$

(d) $\mathrm{Ax}_4(x)$ *: x est le nombre de Gödel d'une instance du schéma d'axiome (A4).*

$$\begin{aligned} &(\exists u)_{u<x}(\exists v)_{v<x}(\exists y)_{y<x}(\mathrm{Fml}(y) \wedge \mathrm{Trm}(u) \wedge \mathrm{EVbl}(2^v) \wedge \\ &\mathrm{Ff}(u,v,y) \wedge x = 2^3 * 2^3 * 2^3 * 2^{13} * 2^v * 2^5 * y * 2^{11} * \\ &\mathrm{Sub}(y,u,v) * 2^5) \end{aligned}$$

(e) $\mathrm{Ax}_5(x)$ *: x est le nombre de Gödel d'une instance du schéma d'axiome (A5).*

$$\begin{aligned} &(\exists u)_{u<x}(\exists v)_{v<x}(\exists w)_{w<x}(\mathrm{Fml}(u) \wedge \mathrm{Fml}(w) \wedge \mathrm{EVbl}(2^v) \wedge \\ &\neg\mathrm{Fr}(u,v) \wedge x = 2^3 * 2^3 * 2^3 * 2^{13} * 2^v * 2^5 * 2^3 * u * 2^{11} * \\ &w * 2^5 * 2^5 * 2^{11} * 2^3 * u * 2^{11} * 2^3 * 2^3 * 2^{13} * 2^v * 2^5 * \\ &w * 2^5 * 2^5 * 2^5) \end{aligned}$$

(f) $\mathrm{LAX}(y)$ *: y est le nombre de Gödel d'une instance d'un axiome logique de K.*

$$\mathrm{Ax}_1(y) \vee \mathrm{Ax}_2(y) \vee \mathrm{Ax}_3(y) \vee \mathrm{Ax}_4(y) \vee \mathrm{Ax}_5(y)$$

(14) $\mathrm{Neg}(x)$ *: le nombre de Gödel de* $\neg\mathcal{B}$ *si x est le nombre de Gödel de* $\mathcal{B}$*.*

$$\mathrm{Neg}(x) = 2^3 * 2^9 * x * 2^5$$

(15) $\mathrm{Cond}(x,y)$ *: le nombre de Gödel de* $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$ *si x et y sont les nombres de Gödel respectifs de* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{C}$*.*

$$\mathrm{Cond}(x,y) = 2^3 * x * 2^{11} * y * 2^5$$

(16) $\mathrm{Clos}(u)$ *: le nombre de Gödel de la fermeture de $\mathcal{B}$ si u est le nombre de Gödel d'une formule bien formée $\mathcal{B}$.*

$$\mathrm{Clos}(u) = H(u, \mu y_{y \leq u}(H(u, y) = H(u, y+1)))$$

où

$$H(u, 0) = G(u)$$
$$H(u, y+1) = G(H(u, y))$$

avec

$$G(u) = \begin{cases} 2^3 * 2^3 * 2^{13} * 2^{V(u)} * 2^5 * u * 2^5 & \textit{si } \mathrm{Fm}(u) \wedge \neg \mathrm{Sent}(u) \\ u & \textit{sinon} \end{cases}$$

formule dans laquelle

$$V(u) = \mu v_{v \leq u}(\mathrm{EVbl}(2^v) \wedge Fr(u, v))$$

et

$$\mathrm{Sent}(u) : \mathrm{Fml}(u) \wedge \neg(\exists v)_{v \leq u} Fr(u, v)$$

qui sont tous deux récursifs primitifs.

Proposition (3.27)**.** *Soit K une théorie ayant un vocabulaire récursif primitif dont le langage contient la constante d'individu 0 et le symbole de fonction f_1^1 de $\mathcal{L}_A$. Les fonctions et relations suivantes sont récursives primitives :*

(17) $\mathrm{Num}(y)$ *: le nombre de Gödel de l'expression $\bar{y}$.*

$$\mathrm{Num}(0) = 2^{15}$$
$$\mathrm{Num}(y+1) = 2^{49} * 2^3 * Num(y) * 2^5$$

(18) $\mathrm{Nu}(x)$ *: x est le nombre de Gödel d'un numéro.*

$$(\exists y)_{y < x}(x = \mathrm{Num}(y))$$

(19) $D(u)$ *: le nombre de Gödel de $\mathcal{B}(\bar{u})$ si u est le nombre de Gödel d'une formule bien formée $\mathcal{B}(x_1)$. D s'appelle fonction diagonale et est récursive primitive.*

$$D(u) = \mathrm{Sub}(u, \mathrm{Num}(u), 21)$$

Définition. Une théorie K a une ensemble d'axiomes récursif primitif si la propriété PrAx est récursive primitive :

$$\mathrm{PrAx}(y) : y \text{ est le nombre de Gödel d'un axiome propre de } K$$

Remarque. La théorie S a un ensemble d'axiomes récursif primitif.

Démonstration. La théorie S est donnée par huit axiomes propres S1 à S8 et un schéma d'axiome propre S9. Premièrement, soient $a_1, \ldots, a_8$ les nombres de Gödel correspondant aux axiomes S1 à S8. Alors, y est le nombre de Gödel d'un des axiomes S1 à S8 si et seulement si :

$$y = a_1 \vee y = a_2 \vee \cdots \vee y = a_8$$

Deuxièmement, soit la relation $\mathrm{Ax}_9(y)$: y est le nombre de Gödel d'une instance du schéma d'axiome S9. La formule récursive primitive $\mathrm{A}_9(y)$ ci-dessous est associée à cette relation :

$$(\exists v)_{v<y}(\exists w)_{w<y}(\mathrm{EVbl}(2^v) \wedge \mathrm{Fml}(w) \wedge y = 2^3 * \mathrm{Sub}(w, 2^{15}, v) *$$
$$2^{11} * 2^3 * 2^3 * 2^3 * 2^{13} * 2^v * 2^5 * 2^3 * w * 2^{11} * \mathrm{Sub}(w, 2^{49} * 2^3 * 2^v * 2^5, v) *$$
$$2^5 * 2^5 * 2^{11} * 2^3 * 2^3 * 2^{13} * 2^v * 2^5 * w * 2^5 * 2^5)$$

La relation $\mathrm{Ax}_9(y)$ est donc récursive primitive. Ainsi, y est le nombre de Gödel d'un axiome propre de S si et seulement si

$$y = a_1 \vee y = a_2 \cdots \vee y = a_8 \vee A_9(y)$$

Donc, la propriété $\mathrm{PrAx}(y)$ est récursive primitive relativement à la théorie S. Par le fait même, la théorie S a un ensemble d'axiomes récursif primitif. $\square$

Proposition (3.28)**.** *Soit K une théorie ayant un vocabulaire récursif primitif et un ensemble d'axiomes récursif primitif. Les relations suivantes sont récursives primitives :*

(20) $\mathrm{Ax}(y)$ *: y est le nombre de Gödel d'un axiome de K.*

La théorie K a deux types d'axiomes : les axiomes logiques (A1) à (A5) et les axiomes propres. y sera donc le nombre de Gödel d'un axiome de K si et seulement si y est le nombre de Gödel d'un axiome logique de K ou y est le nombre de Gödel d'un axiome propre de K, c'est-à-dire si et seulement $\mathrm{LAX}(y)$ *ou* $\mathrm{PrAx}(y)$*. K ayant un vocabulaire récursif primitif et un ensemble d'axiomes récursif primitif, les relations* $\mathrm{LAX}(y)$ *et* $\mathrm{PrAX}(y)$ *sont récursives primitives. La formule récursive primitive associée à* $\mathrm{Ax}(y)$ *est donc :*

$$\mathrm{LAX}(y) \vee \mathrm{PrAx}(y)$$

(21) $\mathrm{Prf}(y)$ *: y est le nombre de Gödel d'une preuve dans K.*

$$(\exists u)_{u<y}(\exists v)_{v<y}(\exists z)_{z<y}(\exists w)_{w<y}([y = 2^w \wedge \mathrm{Ax}(w)] \vee$$
$$[\mathrm{Prf}(u) \wedge \mathrm{Fml}((u)_w) \wedge y = u * 2^v \wedge \mathrm{Gen}((u)_w, v)] \vee$$
$$[\mathrm{Prf}(u) \wedge \mathrm{Fml}((u)_z) \wedge \mathrm{Fml}((u)_w) \wedge y = u * 2^v \wedge \mathrm{MP}((u)_z, (u)_w, v)] \vee$$
$$\mathrm{Prf}(u) \wedge y = u * 2^v \wedge \mathrm{Ax}(v)])$$

(22) $\mathrm{Pf}(x, y)$ *: y est le nombre de Gödel d'une preuve dans K de la formule bien formée dont le nombre de Gödel est x.*

$$\mathrm{Prf}(y) \wedge x = (y)_{lh(y) \dot{-} 1)}$$