LES THÉORÈMES D'INCOMPLÉTUDE DE GÖDEL : UN GUIDE DE DÉMONSTRATION

Neil Kennedy (UQÀM)

A. LE CALCUL PROPOSITIONNEL

I. Syntaxe

• SYMBOLES PRIMITIFS

Langage L composé de symboles de
(1) connecteurs : $\neg$ et $\Rightarrow$;
(2) variables propositionnelles : $p_1, p_2, p_3, \ldots$;
(3) ponctuation : (,).

• FORMULES

(1) Les p_n sont des formules;
(2) Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des formules alors $\neg\mathcal{A}$ et $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ sont des formules;
(3) Toutes les formules sont données par (1) et (2).

• AXIOMES

(A1) $\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$
(A2) $(\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})) \Rightarrow ((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}))$
(A3) $(\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}) \Rightarrow ((\neg\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B})$

• RÈGLE INFÉRENTIELLE

Modus ponens : Si $\mathcal{A}$ et $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ alors $\mathcal{B}$.

• DÉFINITIONS

(D1) $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$ pour $(\neg\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$
(D2) $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$ pour $\neg(\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B})$
(D3) $(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B})$ pour $((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}))$

Une suite $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ de formules est une *preuve* si pour tout $1 \leq i \leq n$:
(1) $\mathcal{A}_i$ est soit un axiome de L ou
(2) il existe $\mathcal{A}_j$ et $\mathcal{A}_k$ avec $j, k < i$ telles que $\mathcal{A}_k$ est $(\mathcal{A}_j \Rightarrow \mathcal{A}_i)$ (c'est-à-dire, $\mathcal{A}_i$ est obtenue par modus ponens de formules précédentes) .

Une formule $\mathcal{A}$ est un *théorème* de *L*, noté $\vdash_L \mathcal{A}$, s'il existe une preuve qui termine par $\mathcal{A}$.

II. Sémantique

$\mathcal{A}$	$\neg\mathcal{A}$
V	F
F	V

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

III. Résultats remarquables

Proposition 1.8 Théorème de la déduction.
Proposition 1.11 Tout théorème de *L* est une tautologie.
Proposition 1.13 (Théorème de complétude) Toute tautologie est un théorème.
Corollaire 1.15 Le système *L* est cohérent (non contradictoire).

B. LE CALCUL DES PRÉDICATS

I. Syntaxe

• SYMBOLES PRIMITIFS

Langage $\mathcal{L}$ composé des symboles de
(1) connecteurs : $\neg$ et $\Rightarrow$;
(2) quantificateur : $\forall$;
(3) ponctuation : (,), ,;
(4) variables : $x_1, x_2, x_3, \ldots$.
Ainsi qu'une quantité
(5) finie (non nulle) ou dénombrable de symboles de prédicats : A_k^n (*n* et *k* sont des entiers positifs);
(6) nulle, finie ou dénombrable de symboles de constantes : $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$;
(7) nulle, finie ou dénombrable de symboles de fonctions : f_k^n (*n* et *k* sont des entiers positifs).

• TERMES

(1) Les variables et les constantes (s'il y en a) de $\mathcal{L}$ sont des termes;

(2) Si $t_1, t_2, ..., t_n$ sont des termes et si f_k^n est un symbole de fonction, alors $f_k^n(t_1, t_2, ..., t_n)$ est également un terme;
(3) Tous les termes sont donnés par (1) et (2).

• FORMULES

Si $t_1, t_2, ..., t_n$ sont des termes et A_k^n est une symbole de prédicat, alors $A_k^n(t_1, t_2, ..., t_n)$ est une *formule atomique*.
(1) Les formules atomiques sont des formules;
(2) $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des formules et si *x* est une variable alors $\neg\mathcal{A}$, $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ et $\forall x\mathcal{A}$ sont des formules;
(3) Les formules sont uniquement données par les règles (1) et (2).

• AXIOMES

Les axiomes en commun à tout système comme $\mathcal{L}$ sont :
(A1-3)
(A4) $\forall x_i \mathcal{A}(x_i) \Rightarrow \mathcal{A}(t)$ si *t* est un terme qui est libre pour *x* dans $\mathcal{A}(x_i)$ [1]
(A5) $\forall x_i(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \forall x_i \mathcal{B})$ si *F* ne contient pas d'occurrences libres de x_i
Viennent ensuite les axiomes propres au langage lui-même (qu'il est impossible de donner sans spécifier davantage $\mathcal{L}$).

• RÈGLES INFÉRENTIELLES

(1) Le *modus ponens* : si $\mathcal{A}$ et $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ alors $\mathcal{B}$
(2) La généralisation : de $\mathcal{A}$, il s'en suit $\forall x\mathcal{A}$.

• DÉFINITIONS

(D1-3)
(D4) $\exists x\mathcal{A}$ pour $\neg\forall x\neg\mathcal{A}$

Une suite $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, ..., \mathcal{A}_n$ de formules est une preuve si pour tout $1 \leq i \leq n$:
1) $\mathcal{A}_i$ est soit un axiome de $\mathcal{L}$ ou
2) il existe $\mathcal{A}_j$ et $\mathcal{A}_k$ avec $j, k < i$ telles que $\mathcal{A}_k$ est $(\mathcal{A}_j \Rightarrow \mathcal{A}_i)$ ou $\mathcal{A}_i$ est $\forall x\mathcal{A}_k$ (c'est-à-dire, $\mathcal{A}_i$ est obtenue de formules précédentes par modus ponens ou généralisation).

Une formule $\mathcal{A}$ est un théorème de $\mathcal{L}$, noté $\vdash_{\mathcal{L}} \mathcal{A}$, s'il existe une preuve qui termine par $\mathcal{A}$.

---

[1] Un terme *t* est libre pour une variable *x* dans une formule $F(x)$ (trois paramètres figurent dans la définition) si *x* n'apparaît pas libre dans $F(x)$ dans la portée d'un quantificateur liant une variable de *t*.

II. Sémantique

• INTERPRÉTATION

Une *interprétation* M d'un langage $\mathcal{L}$ est la donnée d'un ensemble D (un domaine) et d'une application qui associe à chaque symbole de prédicat A_k^n une relation $(A_k^n)^M \subset D^n$, à chaque symbole de fonction f_k^n (s'il y en a) une opération $(f_k^n)^M : D^n \to D$ et à chaque symbole de constante a_n (s'il y en a) un élément $(a_n)^M \in D$.

• SATISFACTION

Soit Σ l'ensemble de toutes les suites dénombrables d'éléments dans D et soit $s = (s_1, s_2, ...) \in \Sigma$. On définit une fonction $s(t)$ pour chaque terme t de $\mathcal{L}$ de la manière suivante :

(1) $s(x_i) = s_i$

(2) $s(a_i) = (a_i)^M$

(3) $s(f_k^n(t_1,...,t_n)) = (f_k^n)^M(s(t_1),...,s(t_n))$

On dira également que s est *i*-équivalente à s' si pour tout $j \neq i$ $s_j = s'_j$.

Satisfaction par $s = (s_1, s_2, ...)$:

(1) *s* satisfait la formule atomique $A_k^n(t_1, t_2, ..., t_n)$ ssi $(A_k^n)^M(s(t_1),...,s(t_n))$, c'est-à-dire ssi $(s(t_1),...,s(t_n)) \in (A_k^n)^M$;

(2) *s* satisfait $\neg\mathcal{A}$ ssi *s* ne satisfait pas $\mathcal{A}$;

(3) *s* ne satisfait pas $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ ssi *s* satisfait $\mathcal{A}$ mais ne satisfait pas $\mathcal{B}$;

(4) *s* satisfait $\forall x_i \mathcal{A}$ ssi tout $s' \in \Sigma$ *i*-équivalente à *s* satisfait $\mathcal{A}$.

• VÉRITÉ, FAUSSETÉ ET MODÈLES

Une formule $\mathcal{A}$ est *vraie* dans l'interprétation *M*, noté $\models_M \mathcal{A}$, si et seulement si toute suite $s \in \Sigma$ satisfait $\mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ est *fausse* dans l'interprétation *M*, noté $\not\models_M \mathcal{A}$, ssi toute suite *s* ne satisfait pas $\mathcal{A}$. *M* est un *modèle* pour un ensemble de formules Γ ssi toute formule de Γ est vraie dans *M*. (p. 48)

III. Résultats remarquables

Proposition 2.2 Tout calcul des prédicats *K* (un langage du premier ordre sans axiomes qui lui sont propres) est cohérent.
Proposition 2.4 Théorème de la déduction (prendre garde à la dépendance!).
Proposition 2.10 Tout théorème d'un calcul des prédicats du premier ordre est logiquement valide (une formule est logiquement valide si elle est vraie dans toutes les interprétations).
Lemme 2.14 Lemme de Lindenbaum.
Proposition 2.17 Toute théorie cohérente *K* admet un modèle dénombrable.
Corollaire 2.18 Toute formule logiquement valide d'une théorie *K* est un théorème de *K*.
Corollaire 2.19 (Théorème de complétude de Gödel) Dans tout calcul des prédicats, les théorèmes sont précisément les formules logiquement valides.

C. L'ARITHMÉTIQUE FORMELLE

Le langage du premier ordre qui nous intéressera par la suite sera le langage *S*. Il contient :
(1) un symbole de constante a_1, que nous noterons 0;
(2) trois symboles de fonctions f_1^1, f_1^2 et f_2^2 que nous noterons par ', + et $\cdot$ respectivement (successeur, addition et multiplication);
(3) un symbole de prédicat A_1^2 que nous noterons par = (le symbole d'égalité).

Les axiomes spécifiques à *S* sont au nombre de neuf :

(S1) $x_1 = x_2 \Rightarrow (x_1 = x_3 \Rightarrow x_2 = x_3)$
(S2) $x_1 = x_2 \Rightarrow x_1' = x_2'$
(S3) $0 \neq x_1'$
(S4) $x_1' = x_2' \Rightarrow x_1 = x_2$
(S5) $x_1 + 0 = x_1$
(S6) $x_1 + x_2' = (x_1 + x_2)'$
(S7) $x_1 \cdot 0 = 0$
(S8) $x_1 \cdot (x_2') = x_1 \cdot x_2 + x_1$
(S9) Pour toute formule $\mathcal{A}(x)$ de *S*, $\mathcal{A}(0) \Rightarrow (\forall x(\mathcal{A}(x) \Rightarrow \mathcal{A}(x')) \Rightarrow \forall x \mathcal{A}(x))$

D. LA RÉCURSIVITÉ

• FONCTIONS INITIALES

(I) la fonction nulle : $Z(x) = 0$ pour tout *x*;
(II) la fonction successeur : $N(x) = x + 1$;

(III) les fonctions de projection : $U_i^n(x_1,...,x_n)=x_i$ pour tous $x_1,...,x_n$.

• LES RÉGLES

(IV) Substitution $f(x_1,...x_n)=g(h_1(x_1,...,x_n),...,h_m(x_1,...,x_n))$
(V) Récursion

$$f(x_1,...,x_n,0)=g(x_1,...,x_n)$$
$$f(x_1,...,x_n,y+1)=h(x_1,...,x_n,y,f(x_1,...,x_n,y))$$

(VI) L'opérateur μ. Supposons que $g(x_1,...,x_n,y)$ est une fonction telle que pour tous $x_1,...,x_n$, il existe au moins un y tel que $g(x_1,...,x_n,y)=0$. Nous dénotons par $\mu y(g(x_1,...,x_n,y)=0)$ le plus petit nombre *y* qui satisfait $g(x_1,...,x_n,y)=0$. Si

$$f(x_1,...,x_n)=\mu y(g(x_1,...,x_n,y)=0)$$

alors on dit que $f(x_1,...,x_n)$ est obtenue de $g(x_1,...,x_n,y)$ par l'opérateur μ.

• FONCTIONS ET RELATIONS RÉCURSIVES

Une fonction *f* est dite *récursive* si et seulement si elle peut être obtenue des fonctions initiales par un nombre fini d'applications des règles (IV), (V) et (VI), c'est-à-dire, s'il existe une suite de fonctions $f_1,...,f_n$ telles que, pour tout i, f_i est soit une fonction initiale soit une fonction obtenue de fonctions $f_{j_1},...,f_{j_r}$ avec $j_1,...,j_r<i$ par l'application des règles (IV), (V) ou (VI). Une fonction est dite *primitivement récursive* si elle est récursive et il est possible de l'obtenir sans l'application de la règle (VI).

• LA REPRÉSENTATION

Une relation arithmétique $R(X_1,...,X_n)$ sera dite *exprimable* dans *K* si et seulement si il existe une formule $\mathcal{R}(x_1,...,x_n)$ telle que pour tous nombres $k_1,...,k_n$:

(1) Si $R(k_1,...,k_n)$ alors $\vdash_K \mathcal{R}(\overline{k}_1,...,\overline{k}_n)$;
(2) Si $\neg R(k_1,...,k_n)$ alors $\vdash_K \neg\mathcal{R}(\overline{k}_1,...,\overline{k}_n)$.

Nous serons particulièrement intéressés par la notion correspondante pour les fonctions. Une fonction arithmétique $f(X_1,...,X_n)$ est dite *représentable* dans *K* si et seulement s'il existe une formule $\mathcal{R}(x_1,...,x_n,x_{n+1})$ de *K* telle que pour tous nombres naturels $k_1,...,k_n$ et m :

(1) Si $f(k_1,...,k_n)=m$ alors $\vdash_K \mathcal{R}(\overline{k}_1,...,\overline{k}_n,\overline{m})$;

(2) $\vdash_K \exists_1 x_{n+1} \mathcal{R}(\overline{k}_1,...,\overline{k}_n,x_{n+1})$.

Les fonctions initiales sont représentables.
La fonction $\beta(x_1,x_2,x_3)$ = le reste de la division euclidienne de $1+(x_3+1)\cdot x_2$ par x_3.

• RÉSULTATS REMARQUABLES

Proposition 3.21 β est récursive et réprésentable.
Proposition 3.22 Pour toute suite de nombres naturels $k_1,k_2,...,k_n$, il existe des nombres *b* et *c* tels que $\beta(b,c,i)=k_i$ pour $0 \le i \le n$.
Proposition 3.23 Toute fonction récursive est représentable dans *S*.
Corollaire 3.24 Toute relation récursive est exprimable dans *S*.

E. L'ARITHMÉTISATION DE LA MÉTAMATHÉMATIQUE

• LES NOMBRES DE GÖDEL

Soit *K* une théorie. On assigne d'abord à chaque symbole primitif de *K* un nombre par une fonction *g* :

(	)	,	$\neg$	$\Rightarrow$	$\forall$
3	5	7	9	11	13

x_k	a_k	f_k^n	A_k^n
$13+8k$	$7+8k$	$1+8(2^n 3^k)$	$3+8(2^n 3^k)$

On définit ensuite une fonction Γ qui attribue un nombre à toute expression $u=u_0u_1\cdots u_r$ de *K* (les u_i sont des symboles primitifs) de la manière suivante :

$$\Gamma(u_0u_1\cdots u_r)=2^{g(u_0)}3^{g(u_1)}\cdots p_r^{\,g(u_r)}$$

où p_i désigne le *i*-ième nombre premier.

Il est possible d'arithmétiser de nombreuses conceptions métamathématiques. Mentionnons en seulement deux :

(1) $\delta(n)$ est le nombre de Gödel de la formule obtenue de la formule de nombre de Gödel *n* ayant une seule variable libre en substituant la variable libre pour le nombre *n*.
(2) $D\acute{e}m(x,y)$ si et seulement si *x* est le nombre de Gödel d'une preuve de la formule de nombre de Gödel *y*.

Les deux sont primitivement récursives.

• RÉSULTATS REMARQUABLES

Proposition 3.28 Sous certaines hypothèses : toute fonction représentable est récursive.
Corollaire 3.29 Une relation est récursive ssi elle est exprimable.

Le système de Robinson (p.157)

Proposition 3.31 Toute fonction récursive est représentable dans l'arithmétique de Robinson.

F. LES THÉORÈMES DE GÖDEL

Proposition 3.32 Le lemme de diagonalisation (général)
Proposition 3.33 Le théorème du point fixe
Proposition 3.34 Si *K* est ω-cohérente alors *K* est cohérente.
Proposition 3.35 (Premier théorème d'incomplétude de Gödel) Si *K* est ω-cohérente alors il existe une formule de *K* qui est indécidable.
Proposition 3.36 (Gödel-Rosser) Si *K* est cohérente alors il existe une formule indécidable dans *K*.

Les conditions de dérivabilité de Hilbert-Bernays

(HB1) Si $\vdash_S \mathcal{A}$ alors $\vdash_S \mathsf{Pf}(\ulcorner \mathcal{A} \urcorner)$

(HB2) $\vdash_S \mathsf{Pf}(\ulcorner (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \urcorner) \Rightarrow (\mathsf{Pf}(\ulcorner \mathcal{A} \urcorner) \Rightarrow \mathsf{Pf}(\ulcorner \mathcal{B} \urcorner))$

(HB3) $\vdash_S \mathsf{Pf}(\ulcorner \mathcal{A} \urcorner) \Rightarrow \mathsf{Pf}(\ulcorner \mathsf{Pf}(\ulcorner \mathcal{A} \urcorner) \urcorner)$

Proposition 3.38 Théorème de Löb. Si $\vdash_S \mathsf{Pf}(\ulcorner \mathcal{A} \urcorner) \Rightarrow \mathcal{A}$ alors $\vdash_S \mathcal{A}$.
Proposition 3.40 (Deuxième théorème d'incomplétude de Gödel) Si *S* est cohérente alors $\nvdash_S \mathsf{Con}_S$.