# Va-et-vient de Fraïssé en théorie des modèles finis

Roger Villemaire

Département d'informatique

**GRILo**

**Groupe de recherche interuniversitaire en logique**

UQÀM
Université du Québec à Montréal

# Plan

- La logique du fini
- FO pour les structures finies
- Expressivité/Inexpressivité
- Jeux de Ehrenfeucht-Fraïssé
- Théorème d'Ehrenfeucht-Fraïssé
- Un exemple d'application
- Références

**GRILo**

**Groupe de recherche interuniversitaire en logique**

Université du Québec à Montréal

# La logique du fini

- Pas de complétude (Trakhtenbrot 1950)
- Pas de compacité
- La logique du premier-ordre (FO) correspond au modèle relationnel dans les bases de données
- Beaucoup de structures discrètes de l'informatique sont du premier-ordre (graphes, ...)

**GRILo**

**Groupe de recherche interuniversitaire en logique**

Université du Québec à Montréal

# FO pour les structures finies

- Avec la relation PE(parent,enfant)
  - e est un orphelin :
    - $\neg\exists p\ PE(p,e)$
  - e est un enfant unique :
    - $\neg\exists p\ \exists e'\ PE(p,e') \wedge PE(p,e) \wedge e \neq e'$
- Avec un graphe <S,A>
  - arité k
  - pas de triangle

**GRILo**

**Groupe de recherche interuniversitaire en logique**

UQÀM
Université du Québec à Montréal

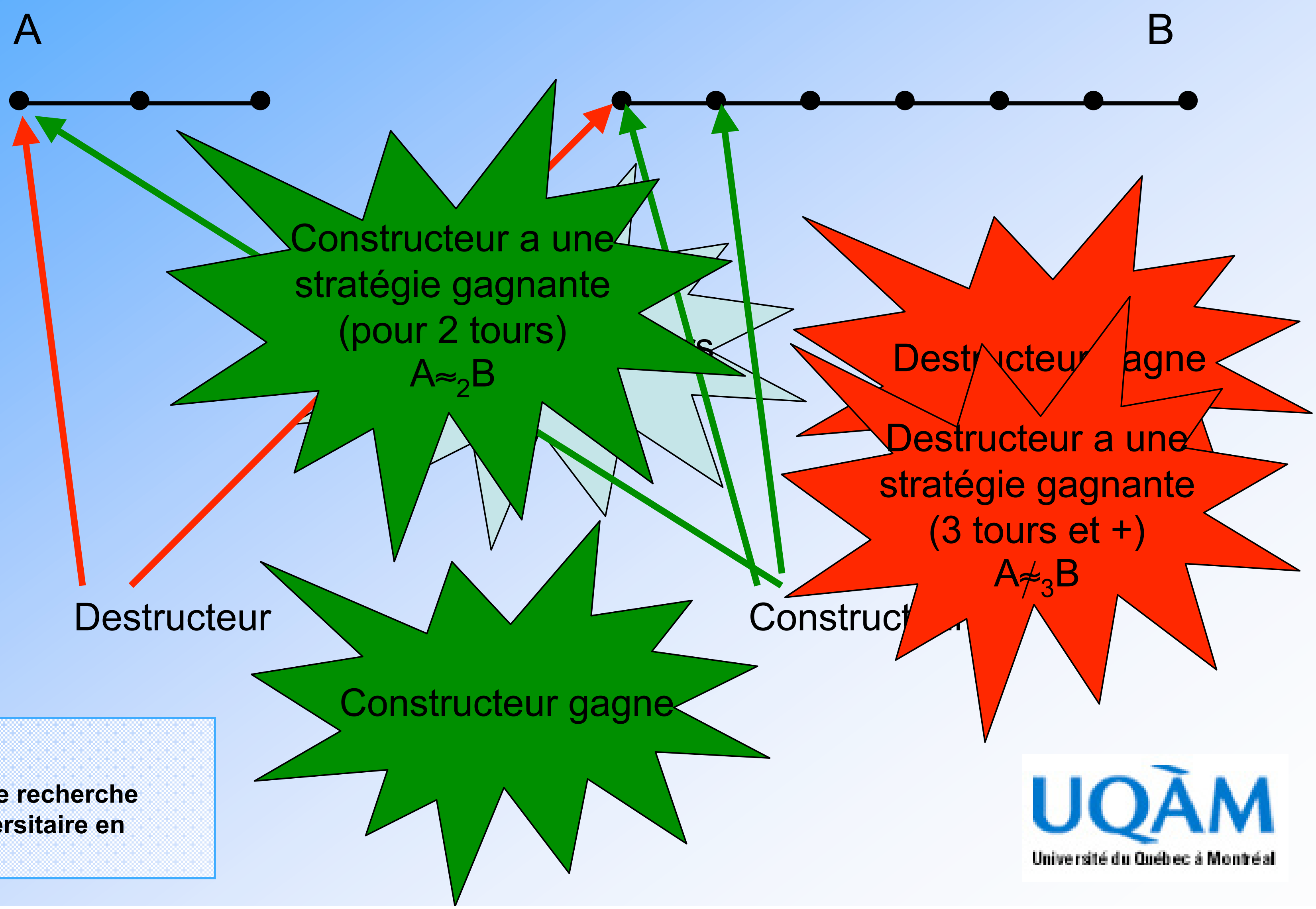
# Expressivité/Inexpressivité

- Expressible
  - Donner une formule.
- Inexpressible
  - Compacité (pour toutes les structures)
    - connexité d'un graphe
  - Autre méthode ?

# Jeux de Ehrenfeucht-Fraïssé

- Deux structures relationnelles A, B.
- Deux joueurs
  - destructeur (spoiler)
  - constructeur (duplicator)
- Construit
  - $(a_1,\ldots,a_n)$ dans A et $(b_1,\ldots,b_n)$ dans B
- Isomorphisme partiel ?

# Ordres linéaires




**GRILo**

**Groupe de recherche interuniversitaire en logique**

# Rang de quantification

- $Qr(\text{atomique})=0$
- $Qr(\neg\varphi)=Qr(\varphi)$
- $Qr(\varphi \text{ op } \psi)=\max(Qr(\varphi),Qr(\psi))$
- $Qr(\forall x\ \varphi)=Qr(\varphi)+1$
- $Qr(\exists x\ \varphi)=Qr(\varphi)+1$

$A\equiv_k B$ si A et B satisfont les mêmes énoncés de rang $\leq k$

**GRILo**

**Groupe de recherche interuniversitaire en logique**

UQÀM Université du Québec à Montréal

# Théorème d'Ehrenfeucht-Fraïssé

$A \approx_k B$ ssi $A \equiv_k B$

- Étendre aux constantes $(A,\mathbf{a}) \approx_k (B,\mathbf{b})$
- Nombre fini de formules de rang k (é.p.)
- Formules de rang k+1 sont
  - c.b. de $\exists x\ \varphi$, pour $\varphi$ de rang k
- Un type de rang k, $tp^A_k(\mathbf{a})$ est définissable par une seule formule.

**GRILo**

**Groupe de recherche interuniversitaire en logique**

UQÀM
Université du Québec à Montréal

# Démonstration

$(A,\mathbf{a}) \approx_k (B,\mathbf{b})$ ssi $(A,\mathbf{a}) \equiv_k (B,\mathbf{b})$

- Par induction sur k

GRILo

Groupe de recherche interuniversitaire en logique

Université du Québec à Montréal

# Un exemple d'application

- $A \equiv_k B$ pour deux ordres linéaires de tailles supérieures à $2^k$
  - $(A,\mathbf{a}) \equiv_k (B,\mathbf{b})$ (pour **a** et **b** contenant les extrémités) ssi
    - dans le même ordre
    - $d(a_i,a_j) = d(b_i,b_j)$ si $< 2^k$
    - $d(a_i,a_j) \geq 2^k$ ssi $d(b_i,b_j) \geq 2^k$
- Être de taille paire n'est pas définissable dans les ordres linéaires finis

# Références


- L. Libkin, *Elements of Finite Model Theory*, Springer 2004
- B. Rossman, *Successor Invariant first-order logic on finite structures*, JSL vol. 72, No 2, June 2007