VA-ET-VIENT DE FRAÏSSÉ : GAIN DU FINI SUR L'INFINI,

LE THÉORÈME DE PRÉSERVATION PAR HOMOMORPHISMES EN THÉORIE DES MODÈLES FINIS

Luc Bélair
UQAM

PLAN

– La logique du fini.
– Fini vs infini : théorèmes de préservation.
– Enjeu
– Va-et-vient (jeu) de Fraïssé
– Logique $\leftrightarrow$ Combinatoire

[0]Sém. de logique, Uqam, 27 mars 2008.

LA LOGIQUE DU FINI, rappel

Logique du premier-ordre dans les structures finies.

- pas de complétude (Traktenbrot, 1950)
- pas de compacité
- correspond au modèle relationnel dans les bases de données
- beaucoup de structures discrètes de l'informatique (graphes, arbres,...)
- avec la relation $PE(parent, enfant)$
  - e est orphelin : $\neg \exists p PE(p, e)$.
- avec un graphe $\langle S, A \rangle$
  - arité k :

$$\forall s \exists s_1 \ldots \exists s_k$$

$$\left(\bigwedge_{i \neq j} s_i \neq s_j \wedge \bigwedge_i A(s, s_i) \wedge \forall t \left(A(s,t) \Rightarrow \bigvee_i t = s_i \right) \right)$$

THÉORÈMES DE PRÉSERVATIONS

- *Łoś-Tarski (1954-55)*. Un énoncé est préservé par plongements si et seulement si il est équivalent à un énoncé existentiel.
- *Lyndon (1959)*. Un énoncé est préservé par homomorphismes surjectifs si et seulement si il est équivalent à un énoncé positif.

- *Keisler (1960)*. Un énoncé est préservé par homomorphismes si et seulement si il est équivalent à un énoncé existentiel positif.

Théorèmes de préservation dans le fini

- *Tait (1959).* Il existe un énoncé qui est préservé par plongements dans les structures finies, mais qui n'est pas équivalent dans le fini à un énoncé existentiel.
- *Ajtai-Gurevich (1984).* Il existe un énoncé qui est préservé par homomorphismes surjectifs dans les structures finies mais qui n'est pas équivalent dans le fini à un énoncé positif.

- **Rossman (2006). Un énoncé est préservé par homomorphismes dans les structures finies si et seulement si il est équivalent dans le fini à un énoncé existentiel positif.**

- **Rossman (2006).**
  Un énoncé est préservé par homomorphismes dans *toutes les structures* si et seulement si il est équivalent à un énoncé existentiel positif *de même rang de quantification*.

- **Rossman (2006).**
  Un énoncé de rang de quantification n est préservé par homomorphismes dans les structures finies si et seulement si il est équivalent dans le fini à un énoncé existentiel positif de rang de quantification $\rho(n)$, où $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est calculable.

ENJEU

Łoś-Tarski *(1954-55)* : esquisse de preuve.

– $\Delta(\mathcal{M})$ = diagramme de la structure $\mathcal{M}$=

$\{Ra_1 \ldots a_n : a_i \in M$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathcal{M}}\}$

$\cup\{\neg Ra_1 \ldots a_n : a_i \in M$ et $(a_1, \ldots, a_n) \notin R^{\mathcal{M}}\}$

– $\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{N}$ ssi $\mathcal{N} \models \Delta(\mathcal{M})$

– σ préservé par plongements ssi
pour chaque $\mathcal{M} \in Mod(\sigma)$, $\Delta(\mathcal{M}) \models \sigma$

– soit σ préservé par plongement

– pour chaque $\mathcal{M} \in Mod(\sigma)$, $\Delta(\mathcal{M}) \models \sigma$

– $\Delta'_{\mathcal{M}} \models \sigma$, $\Delta'_{\mathcal{M}} \subseteq_{fini} \Delta(\mathcal{M})$ (compacité)

– $\Delta'_{\mathcal{M}} \rightsquigarrow \delta'_{\mathcal{M}}$, $\delta'_{\mathcal{M}}$ existentielle

– $\delta'_{\mathcal{M}} \models \sigma$

– $\{\sigma\} \cup \{\neg\delta'_{\mathcal{M}}\}_{\mathcal{M} \in Mod(\sigma)}$ inconsistent

– compacité

– $\sigma, \neg\delta'_1, \ldots, \neg\delta'_n$ inconsistent

– $\sigma \models \delta'_1 \vee \ldots \vee \delta'_n$

– $\sigma \Leftrightarrow \delta'_1 \vee \ldots \vee \delta'_n$ Q.E.D.

N.B.
$\Delta^+(\mathcal{M}) = \{Ra_1 \ldots a_n : a_i \in M, (a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathcal{M}}\}$
σ préservé par hom. ssi pour tout $\mathcal{M}$, $\Delta^+(\mathcal{M}) \models \sigma$
Etc.

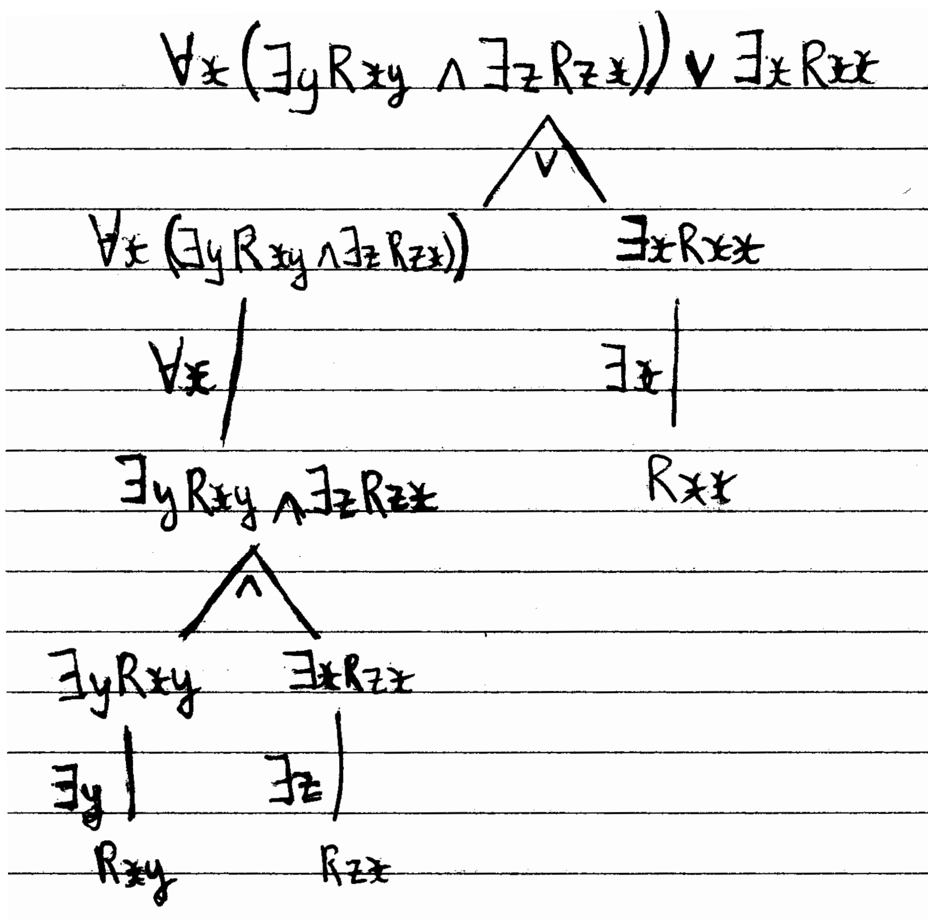
VA-ET-VIENT (JEU) DE FRAÏSSÉ, rappel

– deux structures relationnelles A, B.
– deux joueurs : le destructeur, le constructeur.
– construit : $(a_1, \ldots, a_n)$ dans A et $(b_1, \ldots, b_n)$ dans B
– $a_i \mapsto b_i$ isomorphisme partiel ?
(oui$\mapsto$ le constructeur gagne)

– $A \approx_k B$: le constructeur a une stratégie gagnante ds les suites de longueur k

Rang de quantification

- rg(atomique)=0
- rg($\neg\varphi$)=rg(φ)
- rg(φ op ψ)= max(rg(φ),rg(ψ))
- rg($\exists x\varphi$)=rg(φ)+1
- rg($\forall x\varphi$)=rg(φ)+1


∀x(∃yRxy ∧ ∃zRzx)) ∨ ∃xRxx
∨
∀x(∃yRxy ∧ ∃zRzx))
∃xRxx
∀x
∃x
∃yRxy ∧ ∃zRzx
Rxx
∧
∃yRxy
∃zRzx
∃y
∃z
Rxy
Rzx

Propriétés

– qu'un nombre fini de formules de rang k à équiv. logique près

– $A \equiv_k B$: A, B satisfont mêmes énoncés de rang $\leq k$ $((A, \mathbf{a}) \equiv_k (B, \mathbf{b}))$

– $(A, \mathbf{a}) \equiv_0 (B, \mathbf{b})$ ssi $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{b}$ est un iso. partiel de A ds B

– $(A, \mathbf{a}) \equiv_{k+1} (B, \mathbf{b})$ ssi $\forall \alpha \in A, \exists \beta \in B, (A, \widehat{\mathbf{a}, \alpha}) \equiv_k (B, \widehat{\mathbf{b}, \beta})$ et $\forall \beta \in B, \exists \alpha \in A, (A, \widehat{\mathbf{a}, \alpha}) \equiv_k (B, \widehat{\mathbf{b}, \beta})$

– $A \equiv_{\min(|A|,|B|)+1} B$ ssi $A \simeq B$

THÉORÈME D'EHRENFEUCHT-FRAÏSSÉ

$$A \approx_k B \text{ ssi } A \equiv_k B$$

Corollaire. Être de taille paire n'est pas définissable dans les ordres linéaires finis.
(car dans ces ordres, $A \equiv_k B$ si card(A),card$(B) > 2^k$)

LOGIQUE $\leftrightarrow$ *COMBINATOIRE*

– formule positive primitive (p.p.) : $\wedge, \exists$

– formule existentielle positive : $\vee, \wedge, \exists$

– graphe de Gaifman d'une structure

– profondeur arborescente d'un graphe

– profondeur arborescente d'une structure « $prof(A)$ »

- « $A \to B$ » : il existe un homomorphisme de A ds B $\quad (A \rightleftarrows B)$

- « A est un noyau » : $A \xrightarrow{f} A \Rightarrow f$ iso

- A est un noyau ssi $(B \subseteq A$ et $A \to_B B) \Rightarrow A = B$

- $\forall A$ fini $\exists B \subseteq A$ t.q. $A \to_B B$ et B est un noyau ; de plus B unique à iso près

- $noyau(A) \subseteq A$, $prof(noyau(A)) \leq prof(A)$

- $A \to B$ ssi $noyau(A) \to B$

énoncés p.p.		structures finies
θ	$\rightarrow$	A_θ
θ_A	$\leftarrow$	A

– $B \models \theta$ ssi $A_\theta \rightarrow B$

– $B \models \theta_A$ ssi $A \rightarrow B$

– $card(A_\theta) \leq nq(\theta)$, $prof(A_\theta) \leq rg(\theta)$

– $nq(\theta_A) \leq card(A), rg(\theta_A) = prof(A_\theta)$

– $noyau(\theta)$

– $card(noyau(\theta)) \leq nq(\theta)$,
$prof(noyau(\theta)) \leq rg(\theta)$

énoncés existentiels pos.		noyaux
ψ	$\rightarrow$	$C_{\psi,1},\ldots,C_{\psi,n}$
$\psi_{C_1,\ldots,C_n}$	$\leftarrow$	$C_1,\ldots,C_n$

– $B \models \psi$ ssi $\vee_{i=1}^{n} C_{\psi,i} \rightarrow B$

– $C_{\psi,i} \not\rightarrow C_{\psi,j}, \quad i \neq j$

– $nq(\psi) \geq \max_i card(C_{\psi,i})$,
$rg(\psi) \geq \max_i prof(C_{\psi,i})$

N.B. *COR.* Tout énoncé existentiel positif est préservé par homomorphismes.

Profondeur bornée

- « $A \rightarrow^n B$ », n-homomorphe :
  $\forall C, prof(C) \leq n,$
  $C \rightarrow A \Rightarrow C \rightarrow B$

- $A \rightarrow^n B$ ssi $\forall \theta$, p.p. & $prof(\theta) \leq n$,
  $A \models \theta \Rightarrow B \models \theta$

- $A \overset{n}{\rightleftarrows} B$

- « n-noyau »

- qu'un nombre fini de structures de profondeur au plus n à $\rightleftarrows$ près

- qu'un nombre fini de n-noyaux à iso près

– $noyau^n(A)$

– $A \longrightarrow^n B$ ssi $noyau^n(A) \rightarrow B$

– Supp. $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ t.q. $\forall A, B$ finis, $(A \models \mathcal{P} \ \& \ A \to^n B) \Rightarrow B \models \mathcal{Q}$. Alors il existe un énoncé existentiel positif Ψ, $rg(\Psi) \leq n$, t.q. $\mathcal{P} \models \Psi$ et $\Psi \models \mathcal{Q}$.

- **Rossman (2006).**
  Pour toutes structures A, B **t.q.** $A \overset{\rightarrow_n}{\leftarrow} B$**, il existe des structures** A', B' **t.q.** $A \overset{\rightarrow_n}{\leftarrow} A' \equiv_n B' \overset{\rightarrow_n}{\leftarrow} B$**.**

- **Rossman (2006).**
  Pour toutes structures finies A, B **t.q.** $A \overset{\rightarrow_{\rho(n)}}{\leftarrow} B$**, il existe des structures finies** A', B' **t.q.**
  $A \overset{\rightarrow_n}{\leftarrow} A' \equiv_n B' \overset{\rightarrow_n}{\leftarrow} B$**.**

RÉFÉRENCES

- B. Rossman, Homomorphisms and first-order logic, http ://www.mit.edu/∼brossman/.

- M. Ajtai et Y. Gurevich, Monotone versus positive, Journal of ACM 34 (1987), pp. 1004-1015.
- J. Keisler, Theory of models with generalized atomic formulas, J. Symb. Logic 25 (1960), pp. 1-26.
- L. Libkin, *Elements of finite model theory*, Springer, 2004.
- J. Łoś, On the extending of models I, Fund. Math. 42 (1955), pp. 38-54.
- R.C. Lyndon, Properties preserved under homomorphism, Pacific J. Math. 9 (1959), pp. 143-154.
- W. Tait, A counterexample to a conjecture of Scott and Suppes, J. Symb. Logic 24 (1959), pp. 15-16.
- A. Tarski, Contributions to the theory of models I, II, Indag. Math. 17 (1955), pp. 56-64.