Localité en logique du premier-ordre

Roger Villemaire

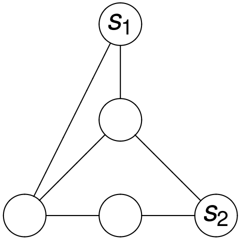
Département d'informatique
UQAM

Séminaire de logique du GRILo
17 avril 2008

Plan

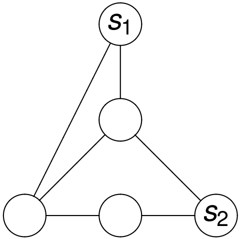
Plan

Graphe non-orienté



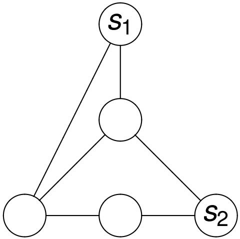
- $\langle S; A \rangle$
- $d_G(s_1, s_2) =$ la longueur du plus petit chemin de s_1 à s_2
- $V_d(s_1)$, l'ensemble des voisins à distance $\leq d$ (sous-graphe)
- $V_d(\bar{s}) = \bigcup_{s \in \bar{s}} V_d(s)$

Graphe non-orienté



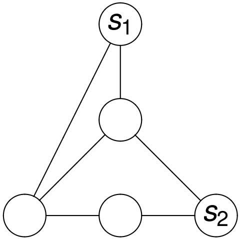
- $\langle S; A \rangle$
- $d_G(s_1, s_2) =$ la longueur du plus petit chemin de s_1 à s_2
- $V_d(s_1)$, l'ensemble des voisins à distance $\leq d$ (sous-graphe)
- $V_d(\bar{s}) = \bigcup_{s \in \bar{s}} V_d(s)$

Graphe non-orienté



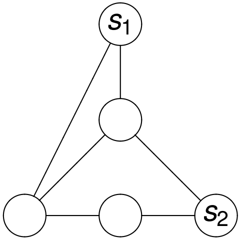
- $\langle S; A\rangle$
- $d_G(s_1, s_2) =$ la longueur du plus petit chemin de s_1 à s_2
- $V_d(s_1)$, l'ensemble des voisins à distance $\leq d$ (sous-graphe)
- $V_d(\bar{s}) = \bigcup_{s\in\bar{s}} V_d(s)$

Graphe non-orienté



- $\langle S; A \rangle$
- $d_G(s_1, s_2) =$ la longueur du plus petit chemin de s_1 à s_2
- $V_d(s_1)$, l'ensemble des voisins à distance $\leq d$ (sous-graphe)
- $V_d(\bar{s}) = \bigcup_{s \in \bar{s}} V_d(s)$

Graphe non-orienté



- $\langle S; A \rangle$
- $d_G(s_1, s_2) =$ la longueur du plus petit chemin de s_1 à s_2
- $V_d(s_1)$, l'ensemble des voisins à distance $\leq d$ (sous-graphe)
- $V_d(\bar{s}) = \bigcup_{s \in \bar{s}} V_d(s)$

La localité

- Une formule du premier-ordre ne “voit” pas loin de ses arguments
- Si s_1, s_2 sont des sommets “éloignés” l'un de l'autre et si $V_d(s_1) \cong V_d(s_2)$ alors $\varphi(s_1, s_2)$ ssi $\varphi(s_2, s_1)$

La localité

- Une formule du premier-ordre ne “voit” pas loin de ses arguments
- Si s_1, s_2 sont des sommets “éloignés” l’un de l’autre et si $V_d(s_1) \cong V_d(s_2)$ alors $\varphi(s_1, s_2)$ ssi $\varphi(s_2, s_1)$

Jeux de Ehrenfeucht-Fraïssé

$$\mathcal{A} \approx_k \mathcal{B}$$

Destructeur	Constructeur
$a_1, a_2, a_3, \ldots a_k$	$b_1, b_2, b_3, \ldots b_k$

Le constructeur gagne si $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$ et $(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k)$ satisfont les mêmes formules atomiques.

Jeux de Ehrenfeucht-Fraïssé

$$\mathcal{A} \approx_k \mathcal{B}$$

Destructeur

$a_1, a_2, a_3, \ldots a_k$

Constructeur

$b_1, b_2, b_3, \ldots b_k$

Le constructeur gagne si $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$ et $(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k)$ satisfont les mêmes formules atomiques.

UQÀM Université du Québec à Montréal

Jeux de Ehrenfeucht-Fraïssé

$$\mathcal{A} \approx_k \mathcal{B}$$

Destructeur	Constructeur
$a_1, a_2, a_3, \ldots a_k$	$b_1, b_2, b_3, \ldots b_k$

Le constructeur gagne si $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$ et $(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k)$ satisfont les mêmes formules atomiques.

Jeux de Ehrenfeucht-Fraïssé

$$\mathcal{A} \approx_k \mathcal{B}$$

Destructeur	Constructeur
$a_1, a_2, a_3, \ldots a_k$	$b_1, b_2, b_3, \ldots b_k$

Le constructeur gagne si $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$ et $(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k)$ satisfont les mêmes formules atomiques.

Jeux de Ehrenfeucht-Fraïssé

$$\mathcal{A} \approx_k \mathcal{B}$$

Destructeur	Constructeur
$a_1, a_2, a_3, \ldots a_k$	$b_1, b_2, b_3, \ldots b_k$

Le constructeur gagne si $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$ et $(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k)$ satisfont les mêmes formules atomiques.

Jeux de Ehrenfeucht-Fraïssé

$$\mathcal{A} \approx_k \mathcal{B}$$

Destructeur	Constructeur
$a_1, a_2, a_3, \ldots a_k$	$b_1, b_2, b_3, \ldots b_k$

Le constructeur gagne si $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$ et $(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k)$ satisfont les mêmes formules atomiques.

Jeux de Ehrenfeucht-Fraïssé

$$\mathcal{A} \approx_k \mathcal{B}$$

Destructeur	Constructeur
$a_1, a_2, a_3, \ldots a_k$	$b_1, b_2, b_3, \ldots b_k$

Le constructeur gagne si $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$ et $(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k)$ satisfont les mêmes formules atomiques.

Jeux de Ehrenfeucht-Fraïssé

$$\mathcal{A} \approx_k \mathcal{B}$$

Destructeur	Constructeur
$a_1, a_2, a_3, \ldots a_k$	$b_1, b_2, b_3, \ldots b_k$

Le constructeur gagne si $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$ et $(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k)$ satisfont les mêmes formules atomiques.

Jeux de Ehrenfeucht-Fraïssé

$$\mathcal{A} \approx_k \mathcal{B}$$

Destructeur	Constructeur
$a_1, a_2, a_3, \ldots a_k$	$b_1, b_2, b_3, \ldots b_k$

Le constructeur gagne si $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$ et $(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k)$ satisfont les mêmes formules atomiques.

$\varphi(s_1, s_2)$ ssi $\varphi(s_2, s_1)$

- s_1, s_2 sont des sommets "éloignés" l'un de l'autre
- $V_d(s_1) \cong V_d(s_2)$
- On veut avoir $\langle S; A, s_1, s_2 \rangle \approx_k \langle S; A, s_2, s_1 \rangle$

- Lorsque le Destructeur joue dans $V_d(s_1)$, le Constructeur réplique dans $V_d(s_2)$
- Lorsque le Destructeur joue dans $V_d(s_2)$, le Constructeur réplique dans $V_d(s_1)$
- Lorsque le Destructeur joue loin de s_1 et s_2, le Constructeur réplique en jouant le même élément

$\varphi(s_1, s_2)$ ssi $\varphi(s_2, s_1)$

- s_1, s_2 sont des sommets “éloignés” l’un de l’autre
- $V_d(s_1) \cong V_d(s_2)$
- On veut avoir $\langle S; A, s_1, s_2\rangle \approx_k \langle S; A, s_2, s_1\rangle$
- Lorsque le Destructeur joue dans $V_d(s_1)$, le Constructeur réplique dans $V_d(s_2)$
- Lorsque le Destructeur joue dans $V_d(s_2)$, le Constructeur réplique dans $V_d(s_1)$
- Lorsque le Destructeur joue loin de s_1 et s_2, le Constructeur réplique en jouant le même élément

$\varphi(s_1, s_2)$ ssi $\varphi(s_2, s_1)$

- s_1, s_2 sont des sommets “éloignés” l’un de l’autre
- $V_d(s_1) \cong V_d(s_2)$
- On veut avoir $\langle S; A, s_1, s_2\rangle \approx_k \langle S; A, s_2, s_1\rangle$
- Lorsque le Destructeur joue dans $V_d(s_1)$, le Constructeur réplique dans $V_d(s_2)$
- Lorsque le Destructeur joue dans $V_d(s_2)$, le Constructeur réplique dans $V_d(s_1)$
- Lorsque le Destructeur joue loin de s_1 et s_2, le Constructeur réplique en jouant le même élément

$\varphi(s_1, s_2)$ ssi $\varphi(s_2, s_1)$

- s_1, s_2 sont des sommets “éloignés” l'un de l'autre
- $V_d(s_1) \cong V_d(s_2)$
- On veut avoir $\langle S; A, s_1, s_2 \rangle \approx_k \langle S; A, s_2, s_1 \rangle$
- Lorsque le Destructeur joue dans $V_d(s_1)$, le Constructeur réplique dans $V_d(s_2)$
- Lorsque le Destructeur joue dans $V_d(s_2)$, le Constructeur réplique dans $V_d(s_1)$
- Lorsque le Destructeur joue loin de s_1 et s_2, le Constructeur réplique en jouant le même élément

$\varphi(s_1, s_2)$ ssi $\varphi(s_2, s_1)$

- s_1, s_2 sont des sommets “éloignés” l’un de l’autre
- $V_d(s_1) \cong V_d(s_2)$
- On veut avoir $\langle S; A, s_1, s_2\rangle \approx_k \langle S; A, s_2, s_1\rangle$
- Lorsque le Destructeur joue dans $V_d(s_1)$, le Constructeur réplique dans $V_d(s_2)$
- Lorsque le Destructeur joue dans $V_d(s_2)$, le Constructeur réplique dans $V_d(s_1)$
- Lorsque le Destructeur joue loin de s_1 et s_2, le Constructeur réplique en jouant le même élément

$\varphi(s_1, s_2)$ ssi $\varphi(s_2, s_1)$

- s_1, s_2 sont des sommets "éloignés" l'un de l'autre
- $V_d(s_1) \cong V_d(s_2)$
- On veut avoir $\langle S; A, s_1, s_2 \rangle \approx_k \langle S; A, s_2, s_1 \rangle$

- Lorsque le Destructeur joue dans $V_d(s_1)$, le Constructeur réplique dans $V_d(s_2)$
- Lorsque le Destructeur joue dans $V_d(s_2)$, le Constructeur réplique dans $V_d(s_1)$
- Lorsque le Destructeur joue loin de s_1 et s_2, le Constructeur réplique en jouant le même élément

$\varphi(s_1, s_2)$ ssi $\varphi(s_2, s_1)$

- s_1, s_2 sont des sommets “éloignés” l’un de l’autre
- $V_d(s_1) \cong V_d(s_2)$
- On veut avoir $\langle S; A, s_1, s_2 \rangle \approx_k \langle S; A, s_2, s_1 \rangle$

- Lorsque le Destructeur joue dans $V_d(s_1)$, le Constructeur réplique dans $V_d(s_2)$
- Lorsque le Destructeur joue dans $V_d(s_2)$, le Constructeur réplique dans $V_d(s_1)$
- Lorsque le Destructeur joue loin de s_1 et s_2, le Constructeur réplique en jouant le même élément

Plan

Graphe et distance de Gaifman

- Le *Graphe de Gaifman* de $\mathcal{B} = \langle B; R_1, \ldots, R_n \rangle$ est $\langle B; A \rangle$ où :
  - $A(b, b')$ ssi il existe $\bar{b} \in B$ tel que $b, b' \in \bar{b}$ et $R_i(\bar{b})$ pour un $i = 1, \ldots, n$
- La distance de Gaifman est la distance dans le graphe de Gaifman

Graphe et distance de Gaifman

- Le *Graphe de Gaifman* de $\mathcal{B} = \langle B; R_1, \ldots, R_n \rangle$ est $\langle B; A \rangle$ où :
  - $A(b, b')$ ssi il existe $\bar{b} \in B$ tel que $b, b' \in \bar{b}$ et $R_i(\bar{b})$ pour un $i = 1, \ldots, n$
- La distance de Gaifman est la distance dans le graphe de Gaifman

Graphe et distance de Gaifman

- Le *Graphe de Gaifman* de $\mathcal{B} = \langle B; R_1, \ldots, R_n \rangle$ est $\langle B; A \rangle$ où :
  - $A(b, b')$ ssi il existe $\bar{b} \in B$ tel que $b, b' \in \bar{b}$ et $R_i(\bar{b})$ pour un $i = 1, \ldots, n$
- La distance de Gaifman est la distance dans le graphe de Gaifman

UQÀM
Université du Québec à Montréal

Plan

bijection d-locale

- $\langle A; R_1, \ldots, R_n, \bar{a}\rangle \leftrightarrows_d \langle B; R_1, \ldots, R_n, \bar{b}\rangle$ si
  - Il existe une bijection $f : A \to B$ telle que $V_d(\bar{a}a) \cong V_d(\bar{b}f(a))$
- Lorsqu'on veut spécifier le nom de la bijection on écrira $f : \langle A; R_1, \ldots, R_n, \bar{a}\rangle \leftrightarrows_d \langle B; R_1, \ldots, R_n, \bar{b}\rangle$

bijection d-locale

- $\langle A; R_1, \ldots, R_n, \bar{a}\rangle \leftrightarrows_d \langle B; R_1, \ldots, R_n, \bar{b}\rangle$ si
  - Il existe une bijection $f : A \to B$ telle que $V_d(\bar{a}a) \cong V_d(\bar{b}f(a))$
- Lorsqu'on veut spécifier le nom de la bijection on écrira $f : \langle A; R_1, \ldots, R_n, \bar{a}\rangle \leftrightarrows_d \langle B; R_1, \ldots, R_n, \bar{b}\rangle$

bijection d-locale

- $\langle A; R_1, \ldots, R_n, \bar{a}\rangle \leftrightarrows_d \langle B; R_1, \ldots, R_n, \bar{b}\rangle$ si
  - Il existe une bijection $f : A \to B$ telle que $V_d(\bar{a}a) \cong V_d(\bar{b}f(a))$
- Lorsqu'on veut spécifier le nom de la bijection on écrira $f : \langle A; R_1, \ldots, R_n, \bar{a}\rangle \leftrightarrows_d \langle B; R_1, \ldots, R_n, \bar{b}\rangle$

Localité de Hanf

- Un prédicat $P(\bar{x})$ est Hanf-local s'il existe un d, tel que pour toutes structures $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et tuplets $\bar{a} \in A$, $\bar{b} \in B$ on a
  - $\mathcal{A} \models P(\bar{a})$ ssi $\mathcal{B} \models P(\bar{b})$ lorsque $\langle A; R_1, \ldots, R_n, \bar{a}\rangle \leftrightarrows_d \langle B; R_1, \ldots, R_n, \bar{b}\rangle$
- Théorème [Hanf (1965), Fagin-Stockmeyer-Vardi (1994)] La logique du premier-ordre est Hanf-locale

Localité de Hanf

- Un prédicat $P(\bar{x})$ est Hanf-local s'il existe un d, tel que pour toutes structures $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et tuplets $\bar{a} \in A$, $\bar{b} \in B$ on a
  - $\mathcal{A} \models P(\bar{a})$ ssi $\mathcal{B} \models P(\bar{b})$ lorsque $\langle A; R_1, \ldots, R_n, \bar{a}\rangle \leftrightarrows_d \langle B; R_1, \ldots, R_n, \bar{b}\rangle$
- Théorème [Hanf (1965), Fagin-Stockmeyer-Vardi (1994)] La logique du premier-ordre est Hanf-locale

UQÀM
Université du Québec à Montréal

Localité de Hanf

- Un prédicat $P(\bar{x})$ est Hanf-local s'il existe un d, tel que pour toutes structures $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et tuplets $\bar{a} \in A$, $\bar{b} \in B$ on a
  - $\mathcal{A} \models P(\bar{a})$ ssi $\mathcal{B} \models P(\bar{b})$ lorsque $\langle A; R_1, \ldots, R_n, \bar{a} \rangle \leftrightarrows_d \langle B; R_1, \ldots, R_n, \bar{b} \rangle$
- Théorème [Hanf (1965), Fagin-Stockmeyer-Vardi (1994)] La logique du premier-ordre est Hanf-locale

Graphes connexes

- Être un graphe connexe n'est pas définissable du premier-ordre
  - Sinon cette propriété serait Hanf-locale pour un certain d.
  - Deux graphes $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ tels que $\mathcal{G} \leftrightarrows_d \mathcal{H}$ seraient tous les deux soient connexes, soient non-connexes
  - Il existe une bijection d-locale entre le cycle C_{4d+2} et l'union disjointes de deux cycles $C_{2d+1} \dot{\cup} C_{2d+1}$
  - Pourtant C_{4d+2} est connexe alors que $C_{2d+1} \dot{\cup} C_{2d+1}$ ne l'est pas (contradiction)

Graphes connexes

- Être un graphe connexe n'est pas définissable du premier-ordre
  - Sinon cette propriété serait Hanf-locale pour un certain d.
  - Deux graphes $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ tels que $\mathcal{G} \leftrightarrows_d \mathcal{H}$ seraient tous les deux soient connexes, soient non-connexes
  - Il existe une bijection d-locale entre le cycle C_{4d+2} et l'union disjointes de deux cycles $C_{2d+1} \dot{\cup} C_{2d+1}$
  - Pourtant C_{4d+2} est connexe alors que $C_{2d+1} \dot{\cup} C_{2d+1}$ ne l'est pas (contradiction)

Graphes connexes

- Être un graphe connexe n'est pas définissable du premier-ordre
  - Sinon cette propriété serait Hanf-locale pour un certain d.
  - Deux graphes $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ tels que $\mathcal{G} \leftrightarrows_d \mathcal{H}$ seraient tous les deux soient connexes, soient non-connexes
  - Il existe une bijection d-locale entre le cycle C_{4d+2} et l'union disjointes de deux cycles $C_{2d+1} \dot{\cup} C_{2d+1}$
  - Pourtant C_{4d+2} est connexe alors que $C_{2d+1} \dot{\cup} C_{2d+1}$ ne l'est pas (contradiction)

Graphes connexes

- Être un graphe connexe n'est pas définissable du premier-ordre
  - Sinon cette propriété serait Hanf-locale pour un certain d.
  - Deux graphes $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ tels que $\mathcal{G} \leftrightarrows_d \mathcal{H}$ seraient tous les deux soient connexes, soient non-connexes
  - Il existe une bijection d-locale entre le cycle C_{4d+2} et l'union disjointes de deux cycles $C_{2d+1} \dot{\cup} C_{2d+1}$
  - Pourtant C_{4d+2} est connexe alors que $C_{2d+1} \dot{\cup} C_{2d+1}$ ne l'est pas (contradiction)

Graphes connexes

- Être un graphe connexe n'est pas définissable du premier-ordre
  - Sinon cette propriété serait Hanf-locale pour un certain d.
  - Deux graphes $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ tels que $\mathcal{G} \leftrightarrows_d \mathcal{H}$ seraient tous les deux soient connexes, soient non-connexes
  - Il existe une bijection d-locale entre le cycle C_{4d+2} et l'union disjointes de deux cycles $C_{2d+1} \dot{\cup} C_{2d+1}$
  - Pourtant C_{4d+2} est connexe alors que $C_{2d+1} \dot{\cup} C_{2d+1}$ ne l'est pas (contradiction)

Limitations de la localité de Hanf

- Pratique pour les propriétés (prédicats d'arités 0), mais plus difficile à utiliser pour des prédicats d'arités > 0

Plan

Localité de Gaifman

- Un prédicat $P(\bar{x})$ est Gaifman-local s'il existe un d, tel que pour toute structure $\mathcal{A}$, et tuplets $\bar{a}, \bar{a'} \in A$ on a
  - $\mathcal{A} \models P(\bar{a})$ ssi $\mathcal{A} \models P(\bar{a'})$ lorsque $V_d(\bar{a}) \cong V_d(\bar{a'})$
- Attention : Une seule structure
- Théorème [Hella-Libkin-Nurmonen (1999)] La logique du premier-ordre est Gaifman-locale

Localité de Gaifman

- Un prédicat $P(\bar{x})$ est Gaifman-local s'il existe un d, tel que pour toute structure $\mathcal{A}$, et tuplets $\bar{a}, \bar{a}' \in A$ on a
  - $\mathcal{A} \models P(\bar{a})$ ssi $\mathcal{A} \models P(\bar{a}')$ lorsque $V_d(\bar{a}) \cong V_d(\bar{a}')$
- Attention : Une seule structure
- Théorème [Hella-Libkin-Nurmonen (1999)] La logique du premier-ordre est Gaifman-locale

Localité de Gaifman

- Un prédicat $P(\bar{x})$ est Gaifman-local s'il existe un d, tel que pour toute structure $\mathcal{A}$, et tuplets $\bar{a}, \bar{a'} \in A$ on a
  - $\mathcal{A} \models P(\bar{a})$ ssi $\mathcal{A} \models P(\bar{a'})$ lorsque $V_d(\bar{a}) \cong V_d(\bar{a'})$
- Attention : Une seule structure
- Théorème [Hella-Libkin-Nurmonen (1999)] La logique du premier-ordre est Gaifman-locale

Localité de Gaifman

- Un prédicat $P(\bar{x})$ est Gaifman-local s'il existe un d, tel que pour toute structure $\mathcal{A}$, et tuplets $\bar{a}, \bar{a}' \in A$ on a
  - $\mathcal{A} \models P(\bar{a})$ ssi $\mathcal{A} \models P(\bar{a}')$ lorsque $V_d(\bar{a}) \cong V_d(\bar{a}')$
- Attention : Une seule structure
- Théorème [Hella-Libkin-Nurmonen (1999)] La logique du premier-ordre est Gaifman-locale

Clôture transitive dans un graphe orienté

- La relation *chemin*(x, y) satisfaite par les couples de sommets x, y reliés par un chemin (orienté), n'est pas définissable du premier-ordre
  - Sinon cette propriété serait Gaifman-locale pour un certain d.
  - Considérons le chemin $\vec{P}_{4d+3}$, ainsi que deux sommets a et b, situés à distance $2d + 1$ l'un de l'autre et à distance d des extrémités
  - Il y a un chemin soit de a à b ou de b à a, mais pas les deux
  - Pourtant $V_d(a)$ et $V_d(b)$ sont isomorphes à $\vec{P}_{2d+1}$ (contradiction)

Clôture transitive dans un graphe orienté

- La relation $chemin(x, y)$ satisfaite par les couples de sommets x, y reliés par un chemin (orienté), n'est pas définissable du premier-ordre
  - Sinon cette propriété serait Gaifman-locale pour un certain d.
  - Considérons le chemin $\vec{P}_{4d+3}$, ainsi que deux sommets a et b, situés à distance $2d + 1$ l'un de l'autre et à distance d des extrémités
  - Il y a un chemin soit de a à b ou de b à a, mais pas les deux
  - Pourtant $V_d(a)$ et $V_d(b)$ sont isomorphes à $\vec{P}_{2d+1}$ (contradiction)

Clôture transitive dans un graphe orienté

- La relation $chemin(x, y)$ satisfaite par les couples de sommets x, y reliés par un chemin (orienté), n'est pas définissable du premier-ordre
  - Sinon cette propriété serait Gaifman-locale pour un certain d.
  - Considérons le chemin $\vec{P}_{4d+3}$, ainsi que deux sommets a et b, situés à distance $2d + 1$ l'un de l'autre et à distance d des extrémités
  - Il y a un chemin soit de a à b ou de b à a, mais pas les deux
  - Pourtant $V_d(a)$ et $V_d(b)$ sont isomorphes à $\vec{P}_{2d+1}$ (contradiction)

Clôture transitive dans un graphe orienté

- La relation *chemin*(x, y) satisfaite par les couples de sommets x, y reliés par un chemin (orienté), n'est pas définissable du premier-ordre
  - Sinon cette propriété serait Gaifman-locale pour un certain d.
  - Considérons le chemin $\vec{P}_{4d+3}$, ainsi que deux sommets a et b, situés à distance $2d+1$ l'un de l'autre et à distance d des extrémités
  - Il y a un chemin soit de a à b ou de b à a, mais pas les deux
  - Pourtant $V_d(a)$ et $V_d(b)$ sont isomorphes à $\vec{P}_{2d+1}$ (contradiction)

Clôture transitive dans un graphe orienté

- La relation $chemin(x, y)$ satisfaite par les couples de sommets x, y reliés par un chemin (orienté), n'est pas définissable du premier-ordre
  - Sinon cette propriété serait Gaifman-locale pour un certain d.
  - Considérons le chemin $\vec{P}_{4d+3}$, ainsi que deux sommets a et b, situés à distance $2d + 1$ l'un de l'autre et à distance d des extrémités
  - Il y a un chemin soit de a à b ou de b à a, mais pas les deux
  - Pourtant $V_d(a)$ et $V_d(b)$ sont isomorphes à $\vec{P}_{2d+1}$ (contradiction)

Plan

Les bijections locales sont extensibles

Théorème

Si $f : \langle A; R_1, \ldots, R_n, \bar{a}\rangle \leftrightarrows_d \langle B; R_1, \ldots, R_n, \bar{b}\rangle$, *alors* $\langle A; R_1, \ldots, R_n, \bar{a}, a\rangle \leftrightarrows_{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor} \langle B; R_1, \ldots, R_n, \bar{b}, f(a)\rangle$

Démonstration.

- On cherche $h : \langle A; R_1, \ldots, R_n, \bar{a}, a\rangle \leftrightarrows_{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor} \langle B; R_1, \ldots, R_n, \bar{b}, f(a)\rangle$
- On a $V_d(\bar{a}a) \cong V_d(\bar{b}f(a))$
- On définit h pour les $V_{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor}(u) \subseteq V_d(\bar{a}a)$
- On définit h pour les $V_{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor}(u) \not\subseteq V_d(\bar{a}a)$

Les bijections locales sont extensibles

Théorème

Si $f : \langle A; R_1, \ldots, R_n, \bar{a}\rangle \leftrightarrows_d \langle B; R_1, \ldots, R_n, \bar{b}\rangle$, *alors* $\langle A; R_1, \ldots, R_n, \bar{a}, a\rangle \leftrightarrows_{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor} \langle B; R_1, \ldots, R_n, \bar{b}, f(a)\rangle$

Démonstration.

- On cherche $h : \langle A; R_1, \ldots, R_n, \bar{a}, a\rangle \leftrightarrows_{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor} \langle B; R_1, \ldots, R_n, \bar{b}, f(a)\rangle$
- On a $V_d(\bar{a}a) \cong V_d(\bar{b}f(a))$
- On définit h pour les $V_{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor}(u) \subseteq V_d(\bar{a}a)$
- On définit h pour les $V_{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor}(u) \not\subseteq V_d(\bar{a}a)$

Les bijections locales sont extensibles

Théorème

Si $f : \langle A; R_1, \ldots, R_n, \bar{a}\rangle \leftrightarrows_d \langle B; R_1, \ldots, R_n, \bar{b}\rangle$, *alors* $\langle A; R_1, \ldots, R_n, \bar{a}, a\rangle \leftrightarrows_{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor} \langle B; R_1, \ldots, R_n, \bar{b}, f(a)\rangle$

Démonstration.

- On cherche $h : \langle A; R_1, \ldots, R_n, \bar{a}, a\rangle \leftrightarrows_{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor} \langle B; R_1, \ldots, R_n, \bar{b}, f(a)\rangle$
- On a $V_d(\bar{a}a) \cong V_d(\bar{b}f(a))$
- On définit h pour les $V_{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor}(u) \subseteq V_d(\bar{a}a)$
- On définit h pour les $V_{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor}(u) \not\subseteq V_d(\bar{a}a)$

Les bijections locales sont extensibles

Théorème

Si $f : \langle A; R_1, \ldots, R_n, \bar{a}\rangle \leftrightarrows_d \langle B; R_1, \ldots, R_n, \bar{b}\rangle$, alors $\langle A; R_1, \ldots, R_n, \bar{a}, a\rangle \leftrightarrows_{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor} \langle B; R_1, \ldots, R_n, \bar{b}, f(a)\rangle$

Démonstration.

- On cherche $h : \langle A; R_1, \ldots, R_n, \bar{a}, a\rangle \leftrightarrows_{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor} \langle B; R_1, \ldots, R_n, \bar{b}, f(a)\rangle$
- On a $V_d(\bar{a}a) \cong V_d(\bar{b}f(a))$
- On définit h pour les $V_{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor}(u) \subseteq V_d(\bar{a}a)$
- On définit h pour les $V_{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor}(u) \not\subseteq V_d(\bar{a}a)$

Les bijections locales sont extensibles

Théorème

Si $f : \langle A; R_1, \ldots, R_n, \bar{a}\rangle \leftrightarrows_d \langle B; R_1, \ldots, R_n, \bar{b}\rangle$, alors
$\langle A; R_1, \ldots, R_n, \bar{a}, a\rangle \leftrightarrows_{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor} \langle B; R_1, \ldots, R_n, \bar{b}, f(a)\rangle$

Démonstration.

- On cherche $h : \langle A; R_1, \ldots, R_n, \bar{a}, a\rangle \leftrightarrows_{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor} \langle B; R_1, \ldots, R_n, \bar{b}, f(a)\rangle$
- On a $V_d(\bar{a}a) \cong V_d(\bar{b}f(a))$
- On définit h pour les $V_{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor}(u) \subseteq V_d(\bar{a}a)$
- On définit h pour les $V_{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor}(u) \not\subseteq V_d(\bar{a}a)$

$\square$

Hanf-localité

Théorème

La logique du premier-order est Hanf-locale.

Démonstration.

- Par induction sur la structure de la formule.
- Pour une formule atomique, un isomorphisme 0-local fera l'affaire.
- Pour la négation, prendre le même d. Pour les opérateurs booléens binaires, le maximum des d.
- Pour le quantificateur existentiel, utiliser le résultat précédent.

□

Hanf-localité

Théorème

La logique du premier-order est Hanf-locale.

Démonstration.

- Par induction sur la structure de la formule.
- Pour une formule atomique, un isomorphisme 0-local fera l'affaire.
- Pour la négation, prendre le même *d*. Pour les opérateurs booléens binaires, le maximum des *d*.
- Pour le quantificateur existentiel, utiliser le résultat précédent.

Hanf-localité

Théorème

La logique du premier-order est Hanf-locale.

Démonstration.

- Par induction sur la structure de la formule.
- Pour une formule atomique, un isomorphisme 0-local fera l'affaire.
- Pour la négation, prendre le même d. Pour les opérateurs booléens binaires, le maximum des d.
- Pour le quantificateur existentiel, utiliser le résultat précédent.

Hanf-localité

Théorème

La logique du premier-order est Hanf-locale.

Démonstration.

- Par induction sur la structure de la formule.
- Pour une formule atomique, un isomorphisme 0-local fera l'affaire.
- Pour la négation, prendre le même d. Pour les opérateurs booléens binaires, le maximum des d.
- Pour le quantificateur existentiel, utiliser le résultat précédent.

Hanf-localité

Théorème

La logique du premier-order est Hanf-locale.

Démonstration.

- Par induction sur la structure de la formule.
- Pour une formule atomique, un isomorphisme 0-local fera l'affaire.
- Pour la négation, prendre le même d. Pour les opérateurs booléens binaires, le maximum des d.
- Pour le quantificateur existentiel, utiliser le résultat précédent.

□

Plan

De Hanf à Gaifman

Théorème

Un prédicat qui est Hanf- est Gaifman-local.

Démonstration.

- Comme dans la démonstration de l'extensibilité de la localité de Hanf
- On fait correspondre les voisinages de tailles $\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$ qui sont à l'intérieur d'un voisinage de taille d.
- Pour l'extérieur, on utilise le fait qu'on est dans une seule et même structure

De Hanf à Gaifman

Théorème

Un prédicat qui est Hanf- est Gaifman-local.

Démonstration.

- Comme dans la démonstration de l'extensibilité de la localité de Hanf
- On fait correspondre les voisinages de tailles $\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$ qui sont à l'intérieur d'un voisinage de taille d.
- Pour l'extérieur, on utilise le fait qu'on est dans une seule et même structure

De Hanf à Gaifman

Théorème

Un prédicat qui est Hanf- est Gaifman-local.

Démonstration.

- Comme dans la démonstration de l'extensibilité de la localité de Hanf
- On fait correspondre les voisinages de tailles $\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$ qui sont à l'intérieur d'un voisinage de taille d.
- Pour l'extérieur, on utilise le fait qu'on est dans une seule et même structure

De Hanf à Gaifman

Théorème

Un prédicat qui est Hanf- est Gaifman-local.

Démonstration.

- Comme dans la démonstration de l'extensibilité de la localité de Hanf
- On fait correspondre les voisinages de tailles $\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$ qui sont à l'intérieur d'un voisinage de taille d.
- Pour l'extérieur, on utilise le fait qu'on est dans une seule et même structure

$\square$

La signature est cruciale

- Attention : Si on augmente la signature d'un graphe pour contenir aussi $\bar{A}$ (le complémentaire de la relation d'adjacence), on a
  - Exactement le même niveau d'expressivité
  - Tous les sommets sont à distance de Gaifman 1, l'un de l'autre
  - C'est toujours Hanf- et Gaifman-local, mais ça n'est plus tellement utile !

La signature est cruciale

- Attention : Si on augmente la signature d'un graphe pour contenir aussi $\bar{A}$ (le complémentaire de la relation d'adjacence), on a
  - Exactement le même niveau d'expressivité
  - Tous les sommets sont à distance de Gaifman 1, l'un de l'autre
  - C'est toujours Hanf- et Gaifman-local, mais ça n'est plus tellement utile !

La signature est cruciale

- Attention : Si on augmente la signature d'un graphe pour contenir aussi $\bar{A}$ (le complémentaire de la relation d'adjacence), on a
  - Exactement le même niveau d'expressivité
  - Tous les sommets sont à distance de Gaifman 1, l'un de l'autre
  - C'est toujours Hanf- et Gaifman-local, mais ça n'est plus tellement utile !

La signature est cruciale

- Attention : Si on augmente la signature d'un graphe pour contenir aussi $\bar{A}$ (le complémentaire de la relation d'adjacence), on a
  - Exactement le même niveau d'expressivité
  - Tous les sommets sont à distance de Gaifman 1, l'un de l'autre
  - C'est toujours Hanf- et Gaifman-local, mais ça n'est plus tellement utile !

La signature est cruciale

- Attention : Si on augmente la signature d'un graphe pour contenir aussi $\bar{A}$ (le complémentaire de la relation d'adjacence), on a
  - Exactement le même niveau d'expressivité
  - Tous les sommets sont à distance de Gaifman 1, l'un de l'autre
  - C'est toujours Hanf- et Gaifman-local, mais ça n'est plus tellement utile !

Conclusion

- La logique du premier-ordre a un portée “locale”
- Les principes de localité de Hanf et Gaifman sont de nature combinatoire
- Le langage (signature) est d’une importance cruciale

Conclusion

- La logique du premier-ordre a un portée “locale”
- Les principes de localité de Hanf et Gaifman sont de nature combinatoire
- Le langage (signature) est d’une importance cruciale

Conclusion

- La logique du premier-ordre a un portée “locale”
- Les principes de localité de Hanf et Gaifman sont de nature combinatoire
- Le langage (signature) est d’une importance cruciale

L. Libkin,
Elements of Finite Model Theory.
Springer, 2004.