La logique des partitions selon Ellerman

Mathieu Bélanger

Séminaire de logique, UQAM–Université de Montréal, 1e mai 2009

Table des matières

1 Les sources de la logique des partitions

La logique des partitions[1] a ses sources dans le traitement catégorique de la logique propositionnelle et dans les travaux de Gian-Carlo Rota.

Premièrement, Ellerman rappelle que le calcul propositionnel peut être interprété de deux façons :

1. Traditionnellement, le calcul propositionnel porte sur des propositions, c'est-à-dire que les variables et les formules — construites à l'aide des connecteurs logiques tels la conjonction, la négation, l'implication matérielle, etc. — représentent des propositions.
2. Une interprétation en termes de sous-ensembles de la logique propositionnelle peut aussi être donnée. Selon celle-ci, les variables et les formules représentent des sous-ensembles d'un univers U donné.

Cette seconde interprétation est notamment utilisée par MacLane et Moerdijk qu'Ellerman cite :

> The propositional calculus considers "Propositions" $p, q, r, \ldots$ combined under the operations "and", "or", "ìmplies", and "not", often written as $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \Rightarrow q$, and $\neg p$. Alternatively, if $P, Q, R, \ldots$ are subsets of some fixed set U with elements u, each proposition p may be replaced by the propositions $u \in P$ for some subset $P \subset U$; the propositional connectives above then become operations on subsets; intersection $\wedge$, union $\vee$, implication ($P \Rightarrow Q$ is $\neg P \vee Q$), and complement of subsets. ([Mac Lane and Moerdijk, 1992], p. 48)

En fait, cette interprétation s'applique également à la logique intuitioniste. Ellerman ne le mentionne pas explicitement dans la première section de son article bien que la citation MacLane et Moerdijk enchaîne avec une remarque à cet effet.

> If, instead, one takes the intuitionistic propositional calculus, as formalized by Heyting, one obtains a different algebraic system on the same operations $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\neg$; such a system is known as a Heyting algebra. The typical model is not the set of *all* subsets of some set, but the set of all *open* subsets of some topological space X; in the model, the operations $\wedge$ and $\vee$ still correspond to intersection and union, respectively, but the other two must be reinterpreted (in order to give open sets). Thus, $U \Rightarrow V$ is the largest open set W such that $W \wedge U \subset V$, while $\neg U$ is the interior of the complement of U (the largest open set disjoint from U). ([Mac Lane and Moerdijk, 1992], p. 48)

De plus, en théorie des catégories, il y a un dualité entre les notions de sous-ensemble et de partition. Ellerman cite ici Lawvere et Rosebrugh : « The dual notion (obtained by reversing the arrows) of "part" is the notion of *partition*. ([Lawvere and Rosebrugh, 2003], p. 85) »

Deuxièmement, Ellerman s'inspire des ressemblances entre les notions de sous-ensembles et de partition mises de l'avant par Rota. D'une part, l'inclusion et le

[1] [Ellerman, 2008]

raffinement définissent des relations d'ordre partiel respectivement sur les sous-ensembles d'un ensemble et les partitions d'un ensemble. D'autre part, ces relations d'ordre partiel induisent des treillis. Ainsi, un supremum, un infimum, un élément maximal et un élément minimal peuvent être définis sur les sous-ensembles ordonné par $\subseteq$ — ce qui est bien connu —, mais aussi sur les partitions d'un ensemble muni de la relation de raffinement.

La prémice d'Ellerman est donc la suivante : si le calcul propositionnel correspond à une logique des sous-ensembles, quelle serait la logique duale ? Visuellement,

$$\begin{tikzcd} \text{logique des sous-ensembles} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{dualité}"] \arrow[d, equal] & ? \arrow[d, equal] \\ \langle \wp(U), \subseteq \rangle \arrow[r, leftrightarrow, "\text{dualité}"] & \text{treillis des partitions} \end{tikzcd}$$

Cette logique duale à la logique des sous-ensemble s'appellera la logique des partitions. L'objectif d'Ellerman est de développer cette logique associée au treillis des partitions.

> If modern logic is formulated as the logic of subsets, or more generally, subobjects or "parts", then the question naturally arises of a dual logic that might play the analogous role for partitions and their generalizations. This paper is an introduction to the "propositional" or "zeroth order" part of partition logic ;

La présente conférence se concentrera sur deux points : premièrement, la construction du treillis des partitions et, deuxièmement, la caractérisation de la logique des partitions relativement aux calculs propositionnels classique et intuitioniste.

2 Partition, relation d'équivalence et relation de partition

Traditionnellement, les notions de partitions d'un ensemble et de relation d'équivalence sur un ensemble — c'est-à-dire un sous-ensemble $E \subseteq U \times U$ qui soit réflexif, symétrique et transitif — sont considérées équivalentes, voire interchangeables. En effet, toute partition détermine une relation d'équivalence et toute relation d'équivalence induit une partition.

Ellerman propose de ne pas amalgamer les notions de partitions d'un ensemble et de relation d'équivalence sur un ensemble.

Définition 2.0.0.1. Soit U un ensemble. Une *relation d'équivalence* sur U est un sous-ensemble $E \subseteq U \times U$ tel que

i) E est réflexif : pour tout $u \in U$, $(u, u) \in E$.

ii) E est symétrique : si $(u, u') \in E$, alors $(u', u) \in E$.

iii) E est transitif : si $(u, u') \in E$ et $(u', u'') \in E$, alors $(u, u'') \in E$.

Exemple. Soit $U = \{x_1, x_2, x_3\}$. $E_1 = \{(x_1, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_3), (x_1, x_2), (x_2, x_1)\}$ est une relation d'équivalence.

Définition 2.0.0.2. Soit U un ensemble. Une *relation de partition* sur U est un sous-ensemble $E \subseteq U \times U$ tel que

i) E est irréflexif : pour tout $u \in U$, $(u, u) \notin E$.

ii) E est symétrique : si $(u, u') \in E$, alors $(u', u) \in E$.

iii) E est anti-transitif : si $(u, u') \in E$, alors pour tout $u'' \in U$, $(u, u'') \in E$ ou bien $(u', u'') \in E$.

Exemple. Soit $U = \{x_1, x_2, x_3\}$. $E_2 = \{(x_1, x_3), (x_2, x_3), (x_3, x_1), (x_3, x_2)\}$ est une relation de partition.

En effet,

i) E est irréflexif : $(x_1, x_1) \notin E$, $(x_2, x_2) \notin E$ et $(x_3, x_3) \notin E$;

ii) E est symétrique : $(x_1, x_3) \in E$ et $(x_3, x_1) \in E$, $(x_2, x_3) \in E$ et $(x_3, x_2) \in E$;

iii) E est anti-transitif : par exemple, $(x_1, x_3) \in E$ et $x_2 \in U$. Or, $(x_1, x_2) \notin E$ et $(x_3, x_2) \notin E$.

Les notions de relation d'équivalence et de relation de partition sont complémentaires dans l'ensemble des relations binaires. Conséquemment, une relation $E \subseteq U \times U$ est une relation d'équivalence si et seulement si la relation complémentaire $E^c \subseteq U \times U$ est une relation de partition.

Exemple. Soient $U = \{x_1, x_2, x_3\}$, $E_1 = \{(x_1, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_3), (x_1, x_2), (x_2, x_1)\}$ et $E_2 = \{(x_1, x_3), (x_2, x_3), (x_3, x_1), (x_3, x_2)\}$.

Par les exemples précédents, E_1 est une relation d'équivalence et E_2 est une relation de partition. De plus, E_1 et E_2 sont complémentaires, c'est-à-dire $E_1^c = E_2$. En effet,

$$
\begin{aligned}
E_1 \cup E_2 &= \{(x_1, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_3), (x_1, x_2), (x_2, x_1)\} \\
&\quad \cup \{(x_1, x_3), (x_2, x_3), (x_3, x_1), (x_3, x_2)\} \\
&= \{(x_1, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_3), (x_1, x_2), (x_2, x_1), (x_1, x_3), (x_3, x_1), \\
&\quad (x_2, x_3), (x_3, x_2)\} \\
&= U
\end{aligned}
$$

Les notions de relation d'équivalence, de relation de partition de même que leur complémentarité peuvent aussi s'exprimer en termes topologiques.

Définition 2.0.0.3. Soit $E \subseteq U \times U$. E est *fermé* si

i) $\Delta = \{(u,u) \mid u \in U\} \subseteq E$

ii) si $(u,u') \in E$, alors $(u',u) \in E$

iii) si $(u,u') \in E$ et $(u',u'') \in E$, alors $(u,u'') \in E$

Autrement dit, un sous-ensemble $E \subseteq U \times U$ est fermé s'il est une relation d'équivalence sur $U \times U$.

Exemple. Soit $U = \{x_1, x_2, x_3\}$. $E_1 = \{(x_1,x_1),(x_2,x_2),(x_3,x_3),(x_1,x_2),(x_2,x_1)\}$ est fermé.

Un opérateur de clôture peut être défini sur les sous-ensembles de $U \times U$. Étant donné $E \subseteq U \times U$, la fermeture $\overline{E}$ de E se construit par la procédure suivante :

1. L'ensemble E^* est formé
   a) en ajoutant les éléments de la diagonale Δ qui n'appartiennent pas à E ;
   b) en rendant E symétrique, c'est-à-dire, pour chaque $(u,u') \in E$, en ajoutant l'élément (u',u).

   Bref, $E^* = E \cup \Delta \cup \{(u',u) \mid (u,u') \in E\}$
2. $\overline{E}$ s'obtient de E^* en ajoutant les éléments nécessaires afin qu'il soit transitif : pour toute suite finie $u = u_1, u_2, \ldots, u_n = u'$ telle que $(u_i, u_{i+1}) \in E^*$ ($i = 1, \ldots, n-1$), les éléments (u,u') et (u',u) sont ajoutés à E^*.

Cette procédure permet bel et bien de construire un ensemble fermé $\overline{E}$, c'est-à-dire un ensemble réflexif, symétrique et transitif à partir de E.

Exemple. Soit $U = \{x_1, x_2, x_3\}$. $E = \{(x_1,x_1),(x_1,x_2)\}$.

1. E^* est construit à partir de E en ajoutant la diagonale et les éléments le rendant symétrique :

$$\begin{aligned} E^* &= E \cup \{(x_2,x_2),(x_3,x_3)\} \cup \{(x_2,x_1)\} \\ &= \{(x_1,x_1),(x_1,x_2),(x_2,x_2),(x_3,x_3),(x_2,x_1)\} \end{aligned}$$

2. $\overline{E}$ est construit à partir de E^* en ajoutant les éléments le rendant transitif :

$$\begin{aligned} \overline{E} &= E^* \cup \emptyset \\ &= \{(x_1,x_1),(x_2,x_2),(x_3,x_3),(x_1,x_2),(x_2,x_1)\} \end{aligned}$$

$\overline{E}$ est bel et bien fermé.

Les notions d'ouvert et d'intérieur se définissent par complémentarité.

Définition 2.0.0.4. Soit $E \subseteq U \times U$.

1. E est ouvert si et seulement son complément E^c est fermé.

2. L'intérieur $\mathrm{int}(E)$ de E est le complément de la clôture de son complément : $\mathrm{int}(E) = \overline{E^c}^c$

Exemple. Soient $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ et $E_2 = \{(x_1, x_3), (x_2, x_3), (x_3, x_1), (x_3, x_2)\}$.

$$\begin{aligned} E_2^c &= U - \{E_2\} \\ &= \{(x_1, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_3), (x_1, x_2), (x_2, x_1)\} \\ &= E_1 \end{aligned}$$

E_2 est donc ouvert car E_1 est fermé.

Exemple. Soient $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ et $E_2 = \{(x_1, x_3), (x_2, x_3), (x_3, x_1), (x_3, x_2)\}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{int}(E_2) &= \overline{E_2^c}^c \\ &= \overline{\{(x_1, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_3), (x_1, x_2), (x_2, x_1)\}}^c \\ &= \{(x_1, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_3), (x_1, x_2), (x_2, x_1)\}^c \\ &= \{(x_1, x_3), (x_2, x_3), (x_3, x_1), (x_3, x_2)\} \\ &= E_2 \end{aligned}$$

En contrepartie, la clôture d'un sous-ensemble $E \subseteq U \times U$ n'est pas un espace topologique. La raison est fort simple : l'union de deux fermés n'est pas nécessairement un fermé.

Exemple. Soit $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Soient les sous-ensembles de $U \times U$

$$R_1 = \{(x_1, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_3), (x_4, x_4), (x_1, x_2), (x_2, x_1)\}$$

et

$$R_2 = \{(x_1, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_3), (x_4, x_4), (x_2, x_3), (x_3, x_2)\}$$

R_1 et R_2 sont fermés. Par contre,

$$R_1 \cup R_2 = \{(x_1, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_3), (x_4, x_4), (x_1, x_2), (x_2, x_1), (x_2, x_3), (x_3, x_2)\}$$

n'est pas fermé. En effet, $R_1 \cup R_2$ n'est pas transitif : $(x_1, x_2) \in R_1 \cup R_2$ et $(x_2, x_3) \in R_1 \cup R_2$, mais $(x_1, x_3) \notin R_1 \cup R_2$.

Une partition sur un ensemble U donne donc lieu à une relation d'équivalence et à une relation de partition. Or, ces relations étant complémentaires, les treillis des relations d'équivalence et le treillis des relations de partitions ne pourront être isomorphes. Ces deux treillis seront plutôt anti-isomorphes.

3 Le treillis des partitions

Définition 3.0.0.5. Soit U un ensemble. Une *partition* π sur U est un ensemble $\{B\}_{B \in \pi}$ de sous-ensembles $B \subseteq U$, $B \neq \emptyset$ tels que

i) pour tout $B, B' \in \pi$, $B \cap B' = \emptyset$;

ii) $\bigcup_{B \in \pi} B = U$.

Exemple. Soit $U = \{x_1, x_2, x_3\}$. $\{\{x_1, x_2\}, \{x_3\}\}$ est une partition de U.

Par définition, les ensembles contiennent des éléments. Ellerman propose que la notion duale d'élément d'un sous-ensemble soit celle de distinction d'une partition.

Définition 3.0.0.6. Une paire $(u, u') \in U \times U$ est une *distinction* d'une partition π s'il existe $B, B' \in \pi$, $B \neq B'$ tels que $u \in B$ et $u' \in B'$.

Intuitivement, une distinction est constituée de deux représentants de deux blocs distincts de la partition.

Exemple. Soient $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ et $\pi = \{\{x_1, x_2\}, \{x_3\}\}$. (x_1, x_3) est une distinction de π.

Définition 3.0.0.7. L'ensemble des distinctions d'une partition π, son *dit set*, noté $\mathrm{dit}(\pi)$, est

$$\mathrm{dit}(\pi) = \bigcup_{B, B' \in \pi, B \neq B'} B \times B'$$

$\mathrm{dit}(\pi)$ exprime donc la partition π comme une relation de partition.

Exemple. Soient $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ et $\pi = \{\{x_1, x_2\}, \{x_3\}\}$.

$$\mathrm{dit}(\pi) = \{(x_1, x_3), (x_2, x_3), (x_3, x_1), (x_3, x_2)\}$$

Réciproquement,

Définition 3.0.0.8. Une paire $(u, u') \in U \times U$ est une *indistinction* d'une partition π s'il existe $B \in \pi$ tel que $u \in B$ et $u' \in B$.

Intuitivement, toute paire d'éléments d'un même bloc d'une partition est une indistinction de celle-ci.

Exemple. Soient $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ et $\pi = \{\{x_1, x_2\}, \{x_3\}\}$. (x_1, x_2) est une indistinction de π.

Définition 3.0.0.9. L'ensemble des indistinctions d'une partition π, son *indit set*, noté $\mathrm{indit}(\pi) = U \times U - \mathrm{dit}(\pi)$, est

$$\begin{aligned}
\mathrm{indit}(\pi) &= \bigcup_{B \in \pi} B \times B \\
&= U \times U - \mathrm{dit}(\pi) \\
&= \mathrm{dit}(\pi)^c
\end{aligned}$$

$\text{indit}(\pi)$ exprime donc la partition comme relation d'équivalence, c'est-à-dire comme la relation complémentaire à la relation de partition.

Exemple. Soient $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ et $\pi = \{\{x_1, x_2\}, \{x_3\}\}$.

$$\text{indit}(\pi) = \{(x_1, x_2), (x_2, x_1), (x_1, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_3)\}$$

En termes d'espaces de clôture sur $U \times U$, les dit sets correspondent aux ouverts et les indit sets correspond quant à eux aux fermés.

En résumé,

$$\begin{tikzcd}
& \pi \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\text{dit}(\pi) \arrow[d, dash] & & \text{indit}(\pi) \arrow[d, dash] \\
\text{relation de partition} & & \text{relation d'équivalence}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& \pi \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\text{dit}(\pi) \arrow[d, dash] & & \text{indit}(\pi) \arrow[d, dash] \\
\text{ouverts} & & \text{fermés}
\end{tikzcd}$$

Un treillis peut être construit sur les partitions d'un ensemble U, c'est-à-dire que les partitions sont partiellement ordonnées et que toute paire de partitions possède un supremum et un infimum. Ce treillis des partitions sera noté $\Pi(U)$.

Un ordre partiel sur les partitions L'ordre partiel sur les partitions de U est donné par la relation de raffinement. Soient $\pi = \{B\}_{B \in \pi}$ et $\sigma = \{C\}_{C \in \sigma}$ deux partitions. π raffine σ, noté $\sigma \preceq \pi$, si pour tout $B \in \pi$, il existe $C \in \sigma$ tel que $B \subseteq C$. Autrement dit, la partition π raffine la partition σ si tout élément de π est un sous-ensemble de σ.

En termes de dit sets, l'ordre partiel sur les partitions est l'inclusion :

$$\sigma \preceq \pi \text{ si et seulement si } \text{dit}(\sigma) \subseteq \text{dit}(\pi)$$

i.e. toute distinction de σ est également une distinction de π.

Exemple. Soient $U = \{x_1, x_2, x_3\}$, $\pi = \{\{x_1, x_2\}, \{x_3\}\}$ et $\sigma = \{\{x_1, x_2, x_3\}\}$ deux partitions de U.

Pour tout $B \in \pi$, il existe $C \in \sigma$ tel que $B \subseteq C$. En effet :

- $\{x_1, x_2\} \subseteq \{x_1, x_2, x_3\}$
- $\{x_3\} \subset \{x_1, x_2, x_3\}$

Donc, $\sigma \preceq \pi$.

Les dit sets permettent aussi de voir que la partition π raffine la partition σ. $\text{dit}(\pi) = \{(x_1, x_3), (x_2, x_3), (x_3, x_1), (x_3, x_2)\}$ et $\text{dit}(\sigma) = \emptyset$. Donc, $\text{dit}(\sigma) \subseteq \text{dit}(\pi)$, d'où $\sigma \preceq \pi$.

Supremum de deux partitions Le supremum $\pi \vee \sigma$ est la partition formée par les intersections non vides des éléments de π et σ. Symboliquement, la partition $\pi \vee \sigma$ est l'ensemble $\{B \cap C \mid B \in \pi, C \in \sigma, B \cap C \neq \emptyset\}$.

En termes de dit sets, le supremum de deux partitions est tout simplement l'union de celles-ci :

$$\mathrm{dit}(\pi \vee \sigma) = \mathrm{dit}(\pi) \cup \mathrm{dit}(\sigma)$$

Exemple. Soient $U = \{x_1, x_2, x_3\}$, $\pi = \{\{x_1, x_2\}, \{x_3\}\}$ et $\sigma = \{\{x_1, x_3\}, \{x_2\}\}$.

$$\begin{aligned}\pi \vee \sigma &= \{B \cap C \mid B \in \pi, C \in \sigma, B \cap C \neq \emptyset\} \\ &= \{\{x_1, x_2\} \cap \{x_1, x_3\}, \{x_1, x_2\} \ \cap \{x_2\}, \{x_3\} \cap \{x_1, x_3\}\} \\ &= \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}\}\end{aligned}$$

En termes de dit sets,

$$\begin{aligned}\mathrm{dit}(\pi \vee \sigma) &= \mathrm{dit}(\pi) \cup \mathrm{dit}(\sigma) \\ &= \{(x_1, x_3), (x_2, x_3), (x_3, x_1), (x_3, x_2)\} \\ &\quad \cup \{(x_1, x_2), (x_3, x_2), (x_2, x_1), (x_2, x_3)\} \\ &= \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_3), (x_2, x_1), (x_3, x_1), (x_3, x_2)\} \\ &= U \times U - \Delta\end{aligned}$$

Infimum Une définition naturelle de l'infimum serait la suivante :

$$\mathrm{dit}(\pi \wedge \sigma) = \mathrm{dit}(\pi) \cap \mathrm{dit}(\sigma)$$

Cette définition n'est toutefois pas satisfaisante. L'espace de clôture n'est pas topologique parce que l'union de deux fermés n'est pas nécessairement fermée. Les fermés et les ouverts étant complémentaires et ces derniers étant identifiés aux dit sets, il en résulte que l'intersection de deux ouverts n'est pas nécessairement un ouvert, c'est-à-dire que l'intersection de deux dit sets n'est pas nécessairement un dit set.

L'infimum de deux partitions se définit plutôt comme suit :

$$\mathrm{dit}(\pi \wedge \sigma) = \mathrm{int}(\mathrm{dit}(\pi) \cap \mathrm{dit}(\sigma))$$

Exemple. Soient $U = \{x_1, x_2, x_3\}$, $\pi = \{\{x_1, x_2\}, \{x_3\}\}$ et $\sigma = \{\{x_1, x_3\}, \{x_2\}\}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{dit}(\pi \wedge \sigma) &= \mathrm{int}(\mathrm{dit}(\pi) \cap \mathrm{dit}(\sigma)) \\ &= \overline{(\mathrm{dit}(\pi) \cap \mathrm{dit}(\sigma))^c}^c \\ &= \overline{\mathrm{dit}(\pi)^c \cup \mathrm{dit}(\sigma)^c}^c \\ &= \overline{\mathrm{indit}(\pi) \cup \mathrm{indit}(\sigma)}^c\end{aligned}$$

Or,

$$\text{indit}(\pi) = \{(x_1, x_2), (x_3, x_3), (x_2, x_1), (x_1, x_1), (x, x_2)\}$$

et

$$\text{indit}(\sigma) = \{(x_1, x_3), (x_2, x_2), (x_3, x_1), (x_1, x_1), (x_3, x_3)\}$$

Par conséquent,

$$\text{indit}(\pi) \cup \text{indit}(\sigma) = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_1), (x_3, x_1), (x_1, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_3)\}$$

À ce stade-ci, il suffit de construire la clôture de $\text{indit}(\pi) \cup \text{indit}(\sigma)$ en ajoutant les éléments réflexifs, symétriques et transitifs manquants :

$$\begin{aligned}\overline{(\text{indit}(\pi) \cup \text{indit}(\sigma))} &= \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_1), (x_3, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_3), \\ &\quad (x_1, x_1)\} + \{(x_2, x_3), (x_3, x_2)\} \\ &= \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_1), (x_3, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_3), \\ &\quad (x_1, x_1), (x_2, x_3), (x_3, x_2)\} \\ &= U \times U\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\text{dit}(\pi \wedge \sigma) &= \overline{\text{indit}(\pi) \cup \text{indit}(\sigma)}^c \\ &= (U \times U)^c \\ &= \emptyset\end{aligned}$$

Donc, $\langle \Pi(U), \preceq, \vee, \wedge \rangle$ est un treillis. En fait, ce treillis des partitions est borné.

L'élément minimal $\perp$ de $\Pi(U)$ est la partition qui est raffinée par toutes les autres. Cette partition ne fait donc aucune distinction. Il en sera ainsi si $\perp = \{U\}$. En termes de dit sets, $\text{dit}(\perp) = \emptyset$.

Réciproquement, l'élément maximal $\top$ de $\Pi(U)$ est la partition qui raffine toutes les autres, c'est-à-dire celle qui fait le plus de distinctions possibles. Donc, $\top = \{\{u\} \mid u \in U\}$, ou encore, en termes de dit sets, $\text{dit}(\top) = U \times U - \Delta$.

Exemple. Soit $U = \{x_1, x_2, x_3\}$. Les partitions de U et leurs dit sets correspondants sont les suivants :

Partitions, $\preceq$	**dit sets,** $\subseteq$
$\pi_1 = U = \{x_1, x_2, x_3\}$	$\text{dit}(\pi_1) = \text{dit}(U) = \emptyset$
$\pi_2 = \{\{x_1, x_2\}, \{x_3\}\}$	$\text{dit}(\pi_2) = \{(x_1, x_3), (x_2, x_3), (x_3, x_1), (x_3, x_2)\}$
$\pi_3 = \{\{x_1, x_3\}, \{x_2\}\}$	$\text{dit}(\pi_3) = \{(x_1, x_2), (x_3, x_2), (x_2, x_1), (x_2, x_3)\}$
$\pi_4 = \{\{x_2, x_3\}, \{x_1\}\}$	$\text{dit}(\pi_4) = \{(x_2, x_1), (x_3, x_1), (x_1, x_2), (x_1, x_3)\}$
$\pi_5 = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}\}$	$\text{dit}(\pi_5) = U \times U - \Delta$

D'où les treillis suivants :

$$\begin{tikzcd}[arrows=-] & \pi_1 = U \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ \pi_2 \arrow[dr] & \pi_3 \arrow[d] & \pi_4 \arrow[dl] \\ & \pi_5 = \{\{x_1\},\{x_2\},\{\ x_3\}\} & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[arrows=-] & \mathrm{dit}(\pi_5) = U \times U - \Delta \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ \mathrm{dit}(\pi_2) \arrow[dr] & \mathrm{dit}(\pi_3) \arrow[d] & \mathrm{dit}(\pi_4) \arrow[dl] \\ & \mathrm{dit}(\pi_1) = \emptyset & \end{tikzcd}$$

4 L'algèbre des partitions

Pour que le treillis $\langle \Pi(U), \preceq, \vee, \wedge \rangle$ soit une algèbre, il suffit de définir une opération d'implication.

Pour ce, Ellerman s'inspire de l'interprétation ensembliste de la logique intuitioniste propositionnelle. Selon celle-ci, les variables représentent des ouverts d'un espace U et les tautologies sont les formules qui, indépendamment de l'assignation d'ouverts aux variables atomiques, prennent comme valeur l'élément maximal du treillis, c'est-à-dire U. Dans ce contexte, l'implication est définie de la manière suivante :

$$A \Rightarrow B = \mathrm{int}(A^c \cup B)$$

où A et B sont des ouverts de l'espace topologique X.

Or, la logique des partitions peut être développée sur un espace de clôture. Il y a alors une correspondance entre les ouverts de l'espace de clôture et les dit sets et une complémentarité entre les ouverts et les fermés dans $U \times U$, c'est-à-dire entre les dit sets et les indit sets. De plus, la logique des partitions possède un opérateur d'intérieur.

Soient U un ensemble et π et σ deux partitions de U. L'implication $\sigma \Rightarrow \pi$ se définit comme suit :

$$\begin{aligned} \mathrm{dit}(\sigma \Rightarrow \pi) &= \mathrm{int}(\mathrm{dit}(\sigma)^c \cup \mathrm{dit}(\pi)) \\ &= \overline{\mathrm{indit}(\pi) - \mathrm{indit}(\sigma)}^c \end{aligned}$$

$\langle \Pi(U), \preceq, \wedge, \vee, \Rightarrow \rangle$ est une algèbre, l'algèbre des partitions.

Exemple. Soient $U = \{x_1, x_2, x_3\}$, $\pi = \{\{x_1, x_2\}, \{x_3\}\}$ et $\sigma = \{\{x_1, x_3\}, \{x_2\}\}$. Alors,

$$\mathrm{indit}(\pi) = \{(x_1, x_2), (x_1, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_3), (x_2, x_1)\}$$

et

$$\mathrm{indit}(\sigma) = \{(x_1, x_3), (x_1, x_1), (x_3, x_3), (x_2, x_2), (x_3, x_1)\}$$

Donc, $\mathrm{indit}(\pi) - \mathrm{indit}(\sigma) = \{(x_1, x_2), (x_2, x_1)\}$. Ceci entraîne que

$$\overline{\mathrm{indit}(\pi) - \mathrm{indit}(\sigma)} = \{(x_1, x_2), (x_2, x_1), (x_1, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_3)\}$$

D'où l'implication $\mathrm{dit}(\sigma \Rightarrow \pi)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{dit}(\sigma \Rightarrow \pi) &= \overline{\mathrm{indit}(\pi) - \mathrm{indit}(\sigma)}^{c} \\ &= \{(x_1, x_2), (x_2, x_1), (x_1, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_3)\}^{c} \\ &= \{(x_1, x_3), (x_2, x_3), (x_3, x_1), (x_3, x_2)\} \end{aligned}$$

On remarque que $\mathrm{dit}(\sigma \Rightarrow \pi) = \mathrm{dit}(\pi)$

L'implication permet de définir la négation sur $\Pi(U)$. À l'instar de l'implication, la définition de la négation en logique des partitions s'inspire de l'interprétation topologique de la logique intuitioniste. En logique intuitioniste, $\neg A = A \Rightarrow \bot$.

Ainsi, étant donnés un ensemble U et une partition π sur U, la négation $\neg\pi$ se définit comme suit :

$$\mathrm{dit}(\neg\pi) = \mathrm{dit}(\pi \Rightarrow \bot)$$

Exemple. Soit $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ et $\pi = \{\{x_1, x_2\}, \{x_3\}\}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{dit}(\neg\pi) &= \mathrm{dit}(\pi \Rightarrow \bot) \\ &= \overline{\mathrm{indit}(\bot) - \mathrm{indit}(\pi)}^{c} \\ &= \overline{U - \mathrm{indit}(\pi)}^{c} \\ &= \overline{\mathrm{dit}(\pi)}^{c} \\ &= \overline{\{(x_1, x_3), (x_2, x_3), (x_3, x_1), (x_3, x_2)\}}^{c} \\ &= U^{c} \\ &= \emptyset \\ &= \mathrm{dit}(\bot) \end{aligned}$$

5 Caractérisation de la logique des partitions

Une formule bien formée de la logique des partitions se construit de la même façon qu'en logique propositionnelle classique.

Sur la base de cette notion de formule, il est légitime de se demander quelles sont les tautologies de la logique des partitions. Selon l'interprétation ensembliste de la logique propositionnelle classique, une tautologie est tout simplement une formule qui donne toujours U, peu importe quels sous-ensembles de U sont assignés aux atomes. Par analogie,

Définition 5.0.0.10. Une *tautologie* de la logique des partitions est une formule qui donne $\top$, peu importe les partitions assignées aux atomes.

Exemple. Les formules suivantes sont des tautologies de la logique des partitions :

1. $\pi \Rightarrow \pi$
2. $\pi \Rightarrow (\pi \vee \sigma)$
3. $(\sigma \wedge (\sigma \Rightarrow \pi)) \Rightarrow \pi$

Autre question légitime, comment se compare la logique des partitions avec la logique propositionnelle classique ou encore avec la logique propositionnelle intuitioniste ? En d'autres termes, une tautologie de la logique des partitions est-elle une tautologie de la logique propositionnelle classique ? En est-elle une de la logique intuitioniste ? Et vice-versa ?

Proposition 5.0.0.11. *Toute tautologie de la logique des partitions est une tautologie de la logique propositionnelle classique.*

La démonstration découle de ce que la logique propositionnelle classique correspond à la logique des partitions sur $U = \{0, 1\}$.

En contrepartie, certaines tautologies de la logique propositionnelle classique ne sont pas des tautologies de la logique des partitions.

Exemple. La loi de Peirce $((\sigma \Rightarrow \pi) \Rightarrow \sigma) \Rightarrow \sigma$ n'est pas une tautologie de la logique des partitions.

Soient $U = \{x_1, x_2, x_3\}$, $\pi = \{\{x_1, x_2\}, \{x_3\}\}$ et $\sigma = \{\{x_1, x_3\}, \{x_2\}\}$.

Premièrement,

$$\begin{aligned}
\operatorname{dit}\big(((\sigma \Rightarrow \pi) \Rightarrow \sigma) \Rightarrow \sigma\big) &= \overline{\operatorname{indit}(\sigma) - \operatorname{indit}((\sigma \Rightarrow \pi) \Rightarrow \sigma))}^{c} \\
&= \overline{\operatorname{indit}(\sigma) - \operatorname{dit}((\sigma \Rightarrow \pi) \Rightarrow \sigma)^{c}}^{c} \\
&= \overline{\operatorname{indit}(\sigma) - \overline{\operatorname{indit}(\sigma) - \operatorname{indit}(\sigma \Rightarrow \pi)}}^{c} \\
&= \overline{\operatorname{indit}(\sigma) - \overline{\operatorname{indit}(\sigma) - \overline{\operatorname{indit}(\pi) - \operatorname{indit}(\sigma)}}}^{c}
\end{aligned}$$

Deuxièmement,

$$\operatorname{indit}(\pi) = \{(x_1, x_2), (x_2, x_1), (x_1, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_3)\}$$

et

$$\operatorname{indit}(\sigma) = \{(x_1, x_3), (x_3, x_1), (x_1, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_3)\}$$

Troisièmement,

$$\begin{aligned}
\overline{\operatorname{indit}(\pi) - \operatorname{indit}(\sigma)} &= \overline{\{(x_1, x_2), (x_2, x_1)\}} \\
&= \{(x_1, x_2), (x_2, x_1), (x_1, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_3)\} \\
&= \operatorname{indit}(\pi)
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{indit}(\sigma) - \overline{\mathrm{indit}(\pi) - \mathrm{indit}(\sigma)}} &= \overline{\mathrm{indit}(\sigma) - \mathrm{indit}(\pi)} \\
&= \overline{(x_1, x_3), (x_3, x_1)} \\
&= \{(x_1, x_3), (x_3, x_1), (x_1, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_3)\} \\
&= \mathrm{indit}(\sigma)
\end{aligned}$$

Conséquemment

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{indit}(\sigma) - \overline{\mathrm{indit}(\sigma) - \overline{\mathrm{indit}(\pi) - \mathrm{indit}(\sigma)}}}^c &= \overline{\mathrm{indit}(\sigma) - \mathrm{indit}(\sigma)}^c \\
&= \overline{\emptyset}^c \\
&= \Delta^c \\
&= U - \Delta
\end{aligned}$$

Or, $U - \Delta \neq U$. Donc, $((\sigma \Rightarrow \pi) \Rightarrow \sigma) \Rightarrow \sigma$ n'est pas une tautologie.

Dans le cas de la logique propositionnelle intuitioniste, il n'y a pas de relation d'inclusion, ni dans une direction, ni dans l'autre.

D'une part, certaines tautologies de la logique intuitioniste ne sont pas des tautologies de la logique des partitions.

Exemple. $\sigma \Rightarrow (\pi \Rightarrow (\pi \wedge \sigma))$ n'est pas une tautologie de la logique des partitions.

D'autre part, certaines tautologies de la logique des partitions ne sont pas des tautologies de la logique intuitioniste.

Exemple. $\neg\pi \vee \neg\neg\pi$ n'est pas une tautologie de la logique intuitioniste.

La deuxième partie de l'article d'Ellerman développe une méthode des tableaux sémantiques pour la logique des partitions. En utilisant cette méthode, il parvient à démontrer la complétude de la logique des partitions.

Bibliographie

D. Ellerman. The Logic of Partitions : Introduction to the Dual of the Logic of Sets. URL `http://www.ellerman.org/Davids-Stuff/Maths/Logic-of-partitions.pdf`. December 2008.

F. W. Lawvere and R. Rosebrugh. *Sets for Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

S. Mac Lane and I. Moerdijk. *Sheaves in Geometry and Logic : A First Introduction to Topos Theory*. Universitext. Springer, New York, 1992.