Théorèmes de représentation et de dualité de Stone et logique (propositionnelle): (1)

┌ G. Boole (1847) à 1850 – Huntington (1904) – Whitehead (1898)

Motivation: En 1933–1936, M. Stone établit une correspondance entre les algèbres Booléennes et la topologie. Connaissant la relation explicite entre la logique classique et les algèbres booléennes, il obtient ~~une~~ des relations directes entre la logique, l'algèbre et la topologie. En 1936, il étend ses résultats aux treillis distributifs (algèbres) et les algèbres de Heyting, la logique intuitionniste et la topologie. Les avantages sont pour lui évidents: utiliser les méthodes algébriques afin de démontrer des résultats dans d'autres disciplines, en particulier l'analyse fonctionnelle. (Ces résultats donnent encore lieu à des recherches fructueuses aujourd'hui, surtout du côté des mathématiques constructivistes à la Bishop.)

Stone est explicite: il obtient un théorème de représentation pour les algèbres de Boole qui est analogue au théorème de représentation de Cayley pour les groupes.

L'analogie est évidemment importante ; de la même manière de le théorème de Cayley montre que n'importe quel groupe peut être représenté comme un groupe de permutation, le théorème de représentation de Stone montre qu'une algèbre Booléenne peut être représentée comme une algèbre de collections (d'ensembles ou de classes). Ceci doit être interprété comme un résultat qui a un contenu "épistémologique" : les algèbres de Boole sont "abstraites", les éléments ne dénotent rien de spécifique lorsqu'elles sont présentées de manière purement axiomatique et équationnelles. Le but de Boole était de faire une algèbre des "lois de la pensée", donc de mettre au pied une approche algébrique, c'est-à-dire équationnelle, de la logique et le théorème de représentation indique ou montre ~~pas~~ en quoi ou de quelle manière il a effectivement atteint son but.

Voici une formulation du théorème que l'on trouve chez Stone

Thm représentation Stone : Soit B une algèbre de Stone arbitraire. Il existe ~~un ensemble~~ une algèbre booléenne d'ensembles C_B t.q.

$$B \simeq C_B.$$

Évidemment, le théorème nous montre comment *construire* l'algèbre d'ensembles à partir de B.

Mais le théorème de Stone, en fait un chapelet de théorèmes, est un peu plus général que cela et donne des conditions qui caractérisent l'existence d'homomorphismes entre certaines algèbres de Boole, + précis : les algèbres de classes homomorphes à B, pour un B fixe.

Comme nous le verrons, le théorème de ~~Stone~~ représentation de Stone, est *équivalent* au théorème de *complétude* en logique.

Stone a également démontré, dans la foulée de ses recherches, qu'il existe une "équivalence mathématique", c'est son expression, entre les algèbres booléennes et certains espaces topologiques. C'est là ce qu'on appelle le théorème de dualité en fait le théo[illegible]
& ce que l'on appelle aujourd'hui les espaces de Stone.

de Stone, qui peut lui aussi être vu comme étant équivalent à un théorème de complétude. La formulation du théorème de dualité s'exprime aujourd'hui tout naturellement dans le cadre de la théorie des catégories.

Nous avons donc :

logique — théorie des treillis (algèbres de Heyting - algèbres de Boole) — topologie — théorie des catégories

Si on peut, dans un premier temps, voir des liens ou des connexions formelles entre ces disciplines, avec des rôles précis pour chacun, il apparaît aujourd'hui que ces liens sont ou peuvent être beaucoup plus profonds qu'il n'y paraît à première vue, tout particulièrement d'un point de vue "formel" ou "constructif" ou "algébrique". Ex : approcher la topologie par le biais de la théorie des treillis, ou même, la logique.

Depuis Stone lui-même : ces théorèmes ont connu de nombreuses généralisations, et conduisent à plusieurs résultats et approches fructueuses et intéressantes : Makkai, Spitzer & Coquand, Taylor...

Dans ce séminaire :

Départ : 1) logique propositionnelle – classique
– intuitionniste
– cohérente (géométrique)

2) Th. des treillis, algèbres de Heyting, algèbres de Boole par le biais des connexions galoisiennes

3) ~~[Th. de représentation et Th de dualité]~~
Th. des catégories.

4) Th. de représentation et Th. de dualité.

① Logique propositionnelle :

~~[Présentation axiomatique de la logique propositionnelle]~~

Rappels : nous allons commencer par des logiques propositionnelles

LP : LP Coh (logique propositionnelle cohérente)
LP Bool (logique propositionnelle Booléenne)
LP Int. (logique propositionnelle intuitionniste

[Restall ; pp. 14 et suivantes]

<u>Définition 1</u> : L'algèbre des suites ~~sur un~~ générées par ensemble X est un ensemble $Sui(X)$ muni d'une opération $\frown$ de concaténation satisfaisant les conditions suivantes :

i) $X \subseteq Sui(X)$

ii) $a \frown (b \frown c) = (a \frown b) \frown c \quad \forall a, b, c \in Sui(X)$

iii) $\forall a \in X \; \neg \exists b, c \in Sui(X) \, (a = b \frown c)$. (atomique)

iv) $\forall a \in Sui(X) \; \exists b_1, \ldots, b_n \in X \, (b_1 \frown b_2 \frown \ldots \frown b_n = a)$

v) Si $a = x \frown b$ et $a = y \frown c$, $x, y \in X$, alors $x = y$, $b = c$. (décomposition unique)

<u>Définition 2</u> : un <u>connecteur logique</u> c est un objet et une fonction $a(c) \in \mathbb{N}$ (l'arité des connecteurs).

<u>Définition 3</u> : Soit FAtom un ensemble (bien-ordonné) de formules atomiques et un ensemble fini Conn de connecteurs, disjoint de FAtom, le <u>langage</u> Lang(FAtom; Conn) est le plus petit sous-ensemble de Sui(FAtom ∪ Conn) satisfaisant les conditions suivantes ;

1) FAtom ⊆ Lang(FAtom; Conn)

2) Si $c \in$ Conn et $a(c) = n$, alors pour tout $A_1, \ldots, A_n \in$ Lang(~~F~~FAtom; Conn), la suite $c \frown A_1 \frown \ldots \frown A_n \in$ Lang(FAtom; Conn),

N.B. [illegible] parenthèses.

6b

Ce qui compte surtout :

__Lemme__ : (Décomposition unique) Si $A \in \mathrm{Lang}(\mathrm{Fatom}, \mathrm{Conn})$ et $A = c^\frown A_1^\frown \dots ^\frown A_n = d^\frown B_1 \dots ^\frown B_m$, alors $c = d$, $m = n$ et pour chaque $i = 1, \dots, n$, $A_i = B_i$.

Nous allons utiliser les parenthèses de la manière habituelle.

Ns avons

$$\mathrm{Conn}_{\mathrm{Coh}} = \{\top, \bot, \wedge, \vee\} \qquad a(\top) = a(\bot) = 0$$
$$a(\wedge) = a(\vee) = 2.$$
$$\mathrm{Conn}_{\mathrm{Bool}} = \{\top, \bot, \wedge, \vee, \neg\} \qquad a(\neg) = 1$$
$$\mathrm{Conn}_{\mathrm{Int}} = \{\top, \bot, \wedge, \vee, \rightarrow\}. \qquad a(\rightarrow) = 2.$$

<u>Définition 4</u> (ponctuation) : un signe de ponctuation p est un objet ~~et~~ et une fonction $a(p) \in \mathbb{N}$.

<u>Définition 5</u> (structure) : une collection <u>Struct</u> de structures est composée d'un langage Lang, d'un ensemble Ponc de signes de ponctuation, disjoint de Lang.

L'ensemble Struct(Lang ; Ponct) de structures sur Lang et Ponc est le plus petit ensemble de Sui(Lang $\cup$ Ponc) qui satisfait les conditions suivantes :

i) Lang $\subseteq$ Struc(Lang ; Ponct) (les formules ont une structure)

ii) si $p \in$ Ponct et $a(p) = n$, alors $\forall X_1, \ldots, X_n \in$ Struc(Lang ; Ponc), la suite $p X_1 \frown \ldots \frown X_n \in$ Struc(Lang ; Ponc).

Définition 6 : (Conséquence logique, antécédents, conséquent) :

Soit un ensemble Struct de structures sur un langage Lang(L), une relation de conséquence (entailment, consécution) sur Struc est de la forme $X \vdash A$, où $X \in$ Struc est l'antécédent de la relation et $A \in$ Lang est le conséquent de la relation.

'A est ~~la~~ une conséquence logique de X'.

~~Définition~~

Nous allons nous restreindre au cas où $X = \{A\}$, une seule formule. Nous avons donc $A \vdash B$.

Nous dénoterons ~~ces~~ les conséquences logiques par α, β, etc

Définition 7 : une inférence ou une règle d'inférence est une relation n-aire, $n \geq 1$, ~~$n \in \mathbb{N}^+$~~, entre des conséquences logiques. Les premières $n-1$ conséquences sont les prémisses, la $n^{ième}$ est la conclusion de l'inférence. Lorsque $n=1$, nous avons un axiome logique ou un schéma d'axiome.

Notation : une règle R se présente de la manière suivante :

$$R \; \frac{\alpha_1 \; \alpha_2 \ldots \alpha_n}{\alpha_{n+1}}$$

où $\alpha_i = A \vdash B$.

Une instance d'un schéma d'axiome est simplement un axiome logique.

Définition : une théorie T, est une paire $T = (Lang, \Sigma)$ où Lang est un langage et Σ est un ensemble de conséquences. Les éléments de Σ sont les axiomes de la théorie T.

Définition : un système de preuves R est ~~dans~~ un langage Lang (avec un ensemble Struc de structures construites sur ce langage) ~~est~~ est une famille de règles d'inférence.

Définition : ~~Une preuve d'une conséquence α dans une théorie T est~~ Une conséquence logique α est démontrable ~~dans~~ dans une théorie T si α appartient au plus petit ensemble Ded de conséquences dans le langage de T qui contient les axiomes de T et qui est fermé sous les règles d'inférence : si R $\dfrac{\alpha_1 \;\cdots\; \alpha_n}{\alpha_{n+1}}$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in$ Ded alors $\alpha_{n+1} \in$ Ded.

Nous écrivons $T \vdash \alpha$ ~~pour~~ lorsque α sera démontrable dans T.

Présentation de règles d'inférences :

I Règles structurales :

S1) $A \vdash A$ (Taut)

S2) $\dfrac{A \vdash B \qquad B \vdash C}{A \vdash C}$ (coupure)

II Règles logiques :

L1) $A \vdash \top$ (Vrai)

L2) $\dfrac{A \vdash B \qquad A \vdash C}{A \vdash B \wedge C}$ (I∧) $\dfrac{A \vdash B \wedge C}{A \vdash B}$ $\dfrac{A \vdash B \wedge C}{A \vdash C}$

L3) $\bot \vdash A$ (Faux)

L4) $\dfrac{B \vdash A \qquad C \vdash A}{B \vee C \vdash A}$ $\dfrac{B \vee C \vdash A}{B \vdash A}$, $\dfrac{B \vee C \vdash A}{C \vdash A}$

L5) $(A \vee B) \wedge C \vdash (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$

L6) $A \wedge \neg A \vdash \bot$ $\top \vdash A \vee \neg A$

L7) $\dfrac{A \vdash B \to C}{A \wedge B \vdash C}$ $\dfrac{A \wedge B \vdash C}{A \vdash B \to C}$

les logiques:

- $LPCoh = Lang(FAtom; Conn_{Con})$

  $Q_{Coh} = \wedge\vee$

  $= S1, S2, L1 (\top), L2 (\wedge), L3(\bot), L4(\vee), L5(\wedge\vee).$

- $LPBool = Lang(FAtom; Conn_{Bool})$

  $Q = S1, S2, L1, L2, L3, L4, L5, L6.$

- $LPInt = Lang(FAtom; Conn_{Int})$

  $Q = S1, S2, L1, L2, L3, L4, L7.$

Exemples de preuves:

①

$$\left[\dfrac{\dfrac{A \wedge B \vdash A \wedge B}{(A \wedge B) \vdash A}}{A \vdash B \to A}\right]$$

Ex :

2. L5 est démontrable dans LPInt :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(A\wedge C)\vee(B\wedge C)\vdash(A\wedge C)\vee(B\wedge C)}{(A\wedge C)\vdash[(A\wedge C)\vee(B\wedge C)]}}{A\vdash C\to[(A\wedge C)\vee(B\wedge C)]}\qquad\dfrac{\dfrac{(A\wedge C)\vee(B\wedge C)\vdash[(A\wedge C)\vee(B\wedge C)]}{(B\wedge C)\vdash[(A\wedge C)\vee(B\wedge C)]}}{B\vdash C\to[(A\wedge C)\vee(B\wedge C)]}}{(A\vee B)\vdash C\to[(A\wedge C)\vee(B\wedge C)]}}{(A\vee B)\wedge C\vdash(A\wedge C)\vee(B\wedge C)}$$

3. [$A\wedge\neg A\vdash\bot$ est démontrable en logique intuitionniste

Déf^{n} : $\neg A = A\to\bot$]

Fait : il est difficile de faire des démonstrations dans ce système. C'est ici qu'un théorème de complétude est plus qu'utile!!!

Quelques rappels sémantiques :

Nous avons, en logique classique, une sémantique simple, fondée sur deux valeurs de vérité V, F, (1, 0).

Défn : une interprétation (assignation) est une fonction
$M : Lang(FAtom; Conn) \longrightarrow \{1, 0\}$. t.q. :

1) $\forall p \in FAtom,\ M(p) \in \{0, 1\}$.

2) $M(A \wedge B) = \begin{cases} 1 & \text{si } M(A) = M(B) = 1 \\ 0 & \text{si } M(A) = 0 \text{ ou } M(B) = 0. \end{cases}$

3) $M(A \vee B) = \begin{cases} 1 & \text{si } M(A) = 1 \text{ ou } M(B) = 1 \\ 0 & \text{si } M(A) = M(B) = 0 \end{cases}$

4) $M(\neg A) = \begin{cases} 1 & \text{si } M(A) = 0 \\ 0 & \text{si } M(A) = 1 \end{cases}$

5) $M(A \to B) = \begin{cases} 0 & \text{si } M(A) = 1 \text{ et } M(B) = 0 \\ 1 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$

Déf. M est un <u>modèle</u> de la conséquence $A \vdash B$

si $M(A) = 1$ alors $M(B) = 1$.

<u>Notation</u> : $M \models (A \vdash B)$.

<u>Défn</u> 1) M est un <u>modèle</u> <u>de la théorie</u> $T = (L, \Sigma)$

si $M \models \alpha \quad \forall \alpha \in \Sigma$.

2) Nous disons que α est une <u>conséquence</u> <u>sémantique</u> de T, $T \models \alpha$, si tous les modèles de T sont des modèles de α aussi.

Il s'agit là de la sémantique pour la logique classique. Concentrons nous sur l'ensemble $\mathbb{2} = \{0, 1\}$. Il est muni de certaines relations et certaines opérations évidentes (les tables de vérité !).

x	y	$x+y$	$x \cdot y$	$-x$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	0

<u>Déf</u>: $x \leq y$ ssi $x \cdot y = x$.

<u>Thm</u> (!?!) : $\leq$ est un ordre partiel.

<u>Pr</u>: 1) $x \leq x$ ssi $x \cdot x = x$ $[0 \cdot 0 = 0 ; 1 \cdot 1 = 1]$ ✓

2) $(x \leq y$ et $y \leq z) \Rightarrow x \leq z$.

<u>Veut</u>: $(x \cdot y = x$ et $y \cdot z = y) \Rightarrow x \cdot z = x$.

$$\left.\begin{aligned} x \cdot y = x &\Rightarrow x \cdot (y \cdot z) = x \\ &\Rightarrow (x \cdot y) \cdot z = x \end{aligned}\right\} \text{associativité}$$

$$\Rightarrow x \cdot z = x \quad ✓.$$

…ms aussi: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$. Une vérification directe sur $\{0,1\}$ est possibl…

3) $x \leq y$ et $y \leq x \Rightarrow x = y$.

<u>Veut</u>: $x \cdot y = x$ et $y \cdot x = y \Rightarrow x = y$.

$$\cancel{x \cdot y = x \Rightarrow x \cdot (y \cdot x) = x}$$

$$\cancel{\Rightarrow (x \cdot y) \cdot x = x}$$

$$x = \underbrace{x \cdot y = y \cdot x} = y$$

Dont aussi $x \cdot y = y \cdot x$. Vérification directe

sur $\{0,1\}$

On a également le théorème de complétude pour la logique classique:

$$\underbrace{T \models \alpha}_{\text{sémantique}} \quad \underline{\underline{\text{ssi}}} \quad \underbrace{T \vdash: \alpha}_{\text{syntaxe}} .$$

• Sémantique ~~de la~~ pour la logique intuitionniste. [Comment faire?]

Approche habituelle:
Pour la logique intuitionniste, il n'y a pas de sémantique ~~fin~~ i.e. c'est un théorème qu'il ne peut y avoir des tables finies ~~de~~ vérité qui soient adéquats pour la logique intuitionniste.

La sémantique, bien que bivalente, repose sur des stades de ~~...~~ connaissance. Formellement, on introduit un "frame", un "cadre" $\langle F, R \rangle$, un ensemble F sur lequel une relation d'ordre partiel est définie:

donc $\forall a, b \in F$, aRa

$(aRb \wedge bRa) \Rightarrow a = b$.

$(aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc$.

Nous écrivons $a \leq b$.

Une assignation $M : \text{Lang}(\text{FAtom}, \text{Conn}) \times \cancel{\mathcal{F}} \to \mathbb{2}$

t.q. 1) $M(p,a) \in \mathbb{2}$

2) $\forall A \in \text{Lang}$, $M(p,a) = 1$ et $a \leq b$, alors $M(p,b) = 1$.

3) ~~M(a,(A∧B) = 1 ssi~~

$M(A \wedge B, a) = 1$ ssi $M(A,a) = M(B,a) = 1$

4) $M(A \vee B, a) = 1$ ssi $M(A,a) = 1$ ou $M(B,a) =$

[5) $M(\neg A, a) = 1$ ssi $M(A,b) = 0$ $\forall b \geq a$.

6) $M(A \to B, a) = 1$ ssi $\forall b \geq a$, si $M(A,b) = 1$, alors $M(B,b) = 1$.

~~M~~.

Si $M(A,a) = 1$, ns disons que A est vraie sous l'assignation M au stade a.

Si A est vraie sous M à tous les stades, ns disons que A est valide sous M ou que M est un modèle de A.

Si A est valide pour tout M, alors A est valide en logique intuitionniste.