

**Autour du mathématicien Hadamard et de  
son livre *“Essai sur la psychologie de  
l’invention dans le domaine  
mathématique”*.**



## Découverte en mathématiques

---

Hadamard définit la pensée inventive comme une pensée « contrôlée » et « concentrée » :

« il y a la pensée “ libre ” qui a lieu lorsque nous laissons vagabonder nos pensées sans les diriger vers un but spécial; et il y a la pensée “ contrôlée ” quand la direction est donnée. Il y a direction de notre pensée quand on lui demande quel jour on est; mais le cas de la pensée inventive est visiblement différent. Elle demande un certain effort de concentration, non seulement elle est contrôlée, mais elle est concentrée. » (p.73-74)

# Différentes phases dans l'invention mathématique

---

4 phases qui caractérisent le processus de découverte :

la préparation

l'incubation

l'illumination

la vérification-finition.

Discours de Poincaré sur le travail sur la théorie des fonctions fuchsienne.

## Phase de préparation

---

« Je voulus représenter ces fonctions par le quotient de deux séries; cette idée fut parfaitement consciente et réfléchie; l'analogie avec les fonctions elliptiques me guidait. Je me demandais quelles devaient être les propriétés de ces séries si elles existaient, et j'arrivai sans difficulté à former les séries que j'ai appelées thétafuchsiennes. (*Phase de préparation*).

**Un contrôle du mathématicien apparaît ici dans la mise en place de relations entre ce que sait le chercheur et le travail en cours (analogie avec les fonctions elliptiques, consciente et réfléchie)**

**Ces efforts mettent en branle la machine inconsciente qui va permettre au chercheur de rentrer dans la deuxième phase de la découverte : l'incubation.**

## Phase d'incubation et d'illumination

« A ce moment, je quittais Caen, que j'habitais alors, pour prendre part à une course géologique entreprise par l'Ecole des Mines. Les péripéties du voyage me firent oublier mes travaux mathématiques; (*Phase d'incubation*) arrivés à Coutances, nous montâmes dans un omnibus pour je ne sais quelle promenade; au moment où je mettais le pied sur le marchepied, l'idée me vint, sans que rien dans mes pensées antérieures parût m'y avoir préparé, que les transformations dont j'avais fait usage pour définir les fonctions fuschsiennes étaient identiques à celles de la géométrie non-euclidienne. Je ne fis pas la vérification; je n'en aurais pas eu le temps puisque, à peine assis dans l'omnibus, je repris la conversation commencée; mais j'eus tout de suite une entière certitude. (*Phase d'illumination*). »

## Phase d'incubation

---

Après la phase de préparation, il reste un nombre extraordinairement grand de combinaisons. L'esprit arrive à percevoir celles qui sont fécondes ou celles qui pourraient le devenir. Travail inconscient.

Le contrôle est défini comme la sélection entre ces idées : le chercheur n'élabore pas de combinaisons inutiles et il n'examine que celles qui sont utiles alors qu'elles ne représentent qu'une petite minorité. Le contrôle est vu comme un discernement, un choix.

## Phase d'illumination

---

C'est le moment où l'idée traverse l'esprit pendant moins d'une seconde (dans le cas de Poincaré, le temps de poser son pied sur une marche et d'entrer dans l'omnibus). Mais ça ne signifie pas que l'idée est assez simple pour ne demander aucun travail.

L'illumination s'est produite avec une grande soudaineté et une absence de préparation.

L'illumination se produit d'un coup, sans effort perceptible.

## Phase de vérification - finition

---

« De retour à Caen, je vérifiais le résultat à tête reposée pour l'acquit de ma conscience. (*Phase de vérification et de finition*).

La notion de contrôle est définie ici comme une activité de vérification suite à une idée, une hypothèse : le chercheur procède à des calculs.

Le contrôle se caractérise ici par la vérification des calcul, comme une perception des erreurs.



## Résultats relais

---


Il arrive souvent que la double opération de vérification et de finition du résultat ne soit pas la fin d'une recherche mais n'en constitue qu'une étape. Chaque étape de la recherche doit pour ainsi dire s'articuler à la suivante par un résultat de forme précise qu'Hadamard propose d'appeler " résultat-relais ". Notre conscient tient compte de ce premier résultat pour ensuite revenir au stade de préparation.

Le résultat relais de Poincaré est celui où il voit que les transformations dont il a fait usage pour définir les fonctions fuschienues étaient identiques à celles de la géométrie non-euclidienne.

## Résultats relais


---

Il y a donc une articulation à faire. Une nouvelle direction dans laquelle la recherche va se poursuivre a besoin d'être décidée, de sorte que ces bifurcations illustrent clairement l'action directrice du moi conscient (on voit ici se dessiner le contrôle).



---

« Je me mis alors à étudier des questions d'Arithmétique sans grand résultat apparent et sans soupçonner que cela put avoir le moindre rapport avec mes recherches antérieures. (*Phase de préparation*) Dégoûté de mon insuccès, j'allai passer quelques jours au bord de la mer, et je pensai à tout autre chose. (*Phase d'incubation*). Un jour, en me promenant sur une falaise, l'idée me vint toujours avec les mêmes caractères de brièveté, de soudaineté et de certitude immédiate, que les transformations arithmétiques des formes quadratiques ternaires indéfinies étaient identiques à celles de la géométrie non-euclidienne (*Phase d'illumination*) ». (p. 22 et 23)



---

Poincaré étudie des questions arithmétiques « sans grand résultat apparent ». Il fait plusieurs déductions qui n'ont apparemment aucun lien entre elles mais il faudra que le chercheur coordonne ces résultats pour continuer son travail de recherche.

# Mathématiciens (Hadamard)

## Synthèse

---

Le contrôle est défini comme la direction d'une pensée.

Phase de préparation : contrôle comme la mise en relation entre ce que sait le chercheur et son but à atteindre.

Phase d'incubation : le contrôle permet la sélection de toutes les idées pour ne retenir que celles qui sont fécondes.

Phase de vérification : le contrôle dans la détection des erreurs.

Après le contrôle apparaît dans l'articulation entre différents résultats-relais (dans la décision à prendre)

**Contrôle** au niveau MÉTA :  
articulation entre les différents  
résultats relais et le but poursuivi

BUT À ATTEINDRE

*détermine*

BLOC 1

**Contrôle** présent tout au long du processus dans ses différentes phases :

- il permet une mise en lien des connaissances du chercheur et ce à quoi il veut aboutir (préparation).
- il permet un choix éclairé parmi les idées (incubation).
- il assure une vérification du travail effectué, une perception des erreurs, pour dépasser le doute simultanément à la finition, à la communication des résultats.

*Aboutit à*

RÉSULTAT  
RELAIS 1

*Fait appel*

**Contrôle** : choix de  
la nouvelle direction à  
prendre (en fonction  
du but à atteindre)

BLOC 2

**Contrôle** présent tout au long du processus :

- il permet une mise en lien des connaissances du chercheur et ce à quoi il veut aboutir.
- il permet un choix éclairé parmi les idées
- il assure une vérification du travail effectué, une perception des erreurs, pour dépasser le doute.

*Aboutit à*

RÉSULTAT  
RELAIS 2

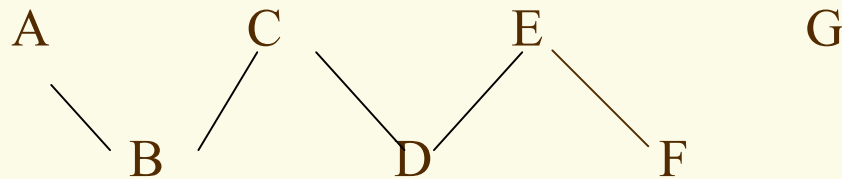
Et ainsi de suite jusqu'au  
RÉSULTAT RELAIS n

*déclenche*

## Éclairage amené par la psychologie du développement (Piaget)

Contrôle dans les situations de contradictions.

Expérience logico mathématique.



Le diamètre de A est de 58,8 mm et celui de G de 60 mm.

Les diamètres croissent de proche en proche du premier au septième selon des différences de 0,2 mm.

Les chercheurs questionnent les élèves sur la relation de G avec A, qu'ils doivent d'abord anticiper, puis vérifier en plaçant les disques l'un sur l'autre.

## Éclairage amené par la psychologie du développement (Piaget)

---

Le contrôle en lien, pour Piaget, avec la sensibilité à la contradiction.

Si les mesures des enfants ont suivi un ordre relevant de la transitivité, ils prennent en général conscience de la contradiction.

Certains enfants de 5 à 7 ans affirment l'égalité de tous les éléments de  $A$  à  $G$  puis ils découvrent que  $G$  est plus grand que  $A$ , alors ils concluent que  $G$  est alors supérieur à tous les autres y compris  $F$ . Ces enfants ne voient pas de contradiction avec l'une des données qu'ils ont admis antérieurement, ils oublient aussitôt qu'ils ont vérifié que  $F = G$ , ils nient donc l'égalité apparente.



## Éclairage amené par la psychologie du développement (Piaget)

---

La prise de conscience de toute contradiction est le souvenir des données, des constatations antérieures.

Le contrôle est lié au dépassement de la contradiction.

Les enfants de 9-10 ans sont conduits à faire l'hypothèse de différences conçues comme imperceptibles pour lever la contradiction entre les égalités apparentes et l'inégalité finale ( $A < G$ ) mais ils ne sont pas encore en état de déduire que celle-ci constitue la somme des différences imperceptibles.

« Peut-être que ça devient toujours plus petit, mais on n'arrive pas à voir. – Comment peux-tu le savoir? – Parce qu'on a tout essayé! » (p. 27)

## Éclairage amené par la psychologie du développement (Piaget)

---

Ce n'est que vers 11-12 ans que les enfants constatent l'inégalité  $G < A$  après avoir cru à une équivalence générale et ils lèvent la contradiction en admettant l'existence de différences non perceptibles, qui sont susceptibles de s'additionner jusqu'à donner lieu à cette inégalité visible.

Le contrôle dans des situations de contradictions est relié à une réflexion rétroactive de la tâche qui repose sur une négation des faits observés.