

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (-\sin x + i \cos x) e^{-ix} + (\cos x + i \sin x)(-i) e^{-ix} \\
 &= (-\sin x + i \cos x - i \cos x - i^2 \sin x) e^{-ix} \\
 &= (-\sin x + i \cos x - i \cos x - (-1) \sin x) e^{-ix} \\
 &= (-\sin x + i \cos x - i \cos x + \sin x) e^{-ix} \\
 &= 0 e^{-ix} = 0
 \end{aligned}$$