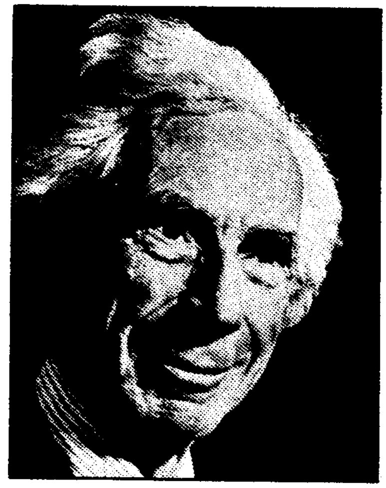
Les fondements des mathématiques

par Morris Kline

■ **Les mathématiques sont souvent regardées comme la science rigoureuse par excellence ; et cette réputation, certes, n'est pas imméritée. Mais, au sens strict, il est impossible de considérer cette rigueur comme absolue. En effet, depuis 1850 environ, les mathématiciens ont appris à remettre en question les bases de leurs constructions.**

■ **La création des géométries non euclidiennes et la découverte de certaines antinomies ont joué à cet égard un rôle décisif. Il n'est pas exagéré de parler d'une « crise des fondements », qui obligea les mathématiciens à proposer de nouvelles solutions. C'est à la description et à un bilan de ces efforts théoriques (logicisme, intuitionnisme, formalisme) qu'est consacré le présent article de Morris Kline.**



■ A considérer l'histoire des mathématiques à peu près jusqu'en 1850, on relève deux traits marquants et contradictoires. D'un côté, leur développement n'est pas logique. Un mélange d'intuitions, de suppositions astucieuses, d'opérations purement formelles appliquées de façon non critique et d'arguments physiques conduisait les mathématiciens à affirmer des énoncés appelés « théorèmes ». Bien sûr, ni les profanes ni même les étudiants de cette discipline n'en savaient rien. Leurs professeurs, comme leurs manuels, les poussaient à croire que les mathématiques se développaient sur la base de raisonnements d'une entière validité, de telle sorte que chaque résultat se trouvait établi sans aucun doute possible. En réalité, ce n'était vrai que de la géométrie euclidienne, c'est-à-dire du texte dans lequel, vers 300 av. J.-C., Euclide avait organisé la masse des résultats géométriques connus de ses prédécesseurs en une structure logique d'une raisonnable solidité. Mais ce n'était pas du tout vrai de l'arithmétique, de l'algèbre, du calcul infinitésimal et d'importantes parties de l'analyse construites sur ce calcul.

D'un autre côté, et cela contredisait en apparence le caractère illogique de ce développement, même les grands mathématiciens étaient convaincus que les mathématiques constituaient un corps de vérités, en ce sens que leurs assertions fournissaient des descriptions incontestablement vraies des phénomènes naturels. Comment des mathématiciens, conscients dans l'ensemble du fondement incertain de leurs théorèmes, pouvaient-ils croire leurs conclusions vraies ? Comme il arrivait que leurs « théorèmes » prédisent avec une remarquable exactitude des événements physiques (par exemple une éclipse de la Lune

CHAPTER II

THE THEORY OF LOGICAL TYPES

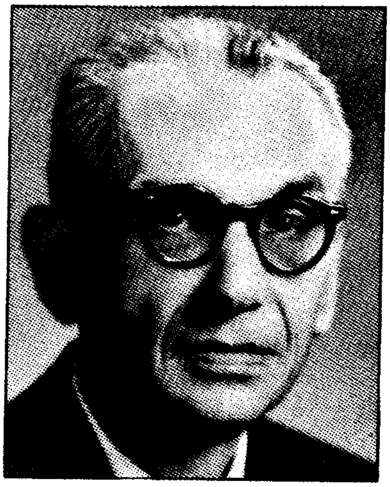
THE theory of logical types, to be explained in the present Chapter, recommended itself to us in the first instance by its ability to solve certain contradictions, of which the one best known to mathematicians is Burali-Forti's concerning the greatest ordinal. But the theory in question is not wholly dependent upon this indirect recommendation: it has also a certain consonance with common sense which makes it inherently credible. In what follows, we shall therefore first set forth the theory on its own account, and then apply it to the solution of the contradictions.

I. *The Vicious-Circle Principle.*

An analysis of the paradoxes to be avoided shows that they all result from a certain kind of vicious circle*. The vicious circles in question arise from supposing that a collection of objects may contain members which can only be defined by means of the collection as a whole. Thus, for example, the collection of *propositions* will be supposed to contain a proposition stating that "all propositions are either true or false." It would seem, however, that such a statement could not be legitimate unless "all propositions" referred to some already definite collection, which it cannot do if new propositions are created by statements about "all propositions." We shall, therefore, have to say that statements about "all propositions" are meaningless. More generally, given any set of objects such that, if we suppose the set to have a total, it will contain members which presuppose this total, then such a set cannot have a total. By saying that a set has "no total," we mean, primarily, that no significant statement can be made about "all its members." Propositions, as the above illustration shows, must be a set having no total. The same is true, as we shall shortly see, of propositional functions, even when these are restricted to such as can significantly have as argument a given object a. In such cases, it is necessary to break up our set into smaller sets, each of which is capable of a total. This is what the theory of types aims at effecting.

The principle which enables us to avoid illegitimate totalities may be stated as follows: "Whatever involves *all* of a collection must not be one of the collection"; or, conversely: "If, provided a certain collection had a total, it would have members only definable in terms of that total, then the said collection has no total." We shall call this the "vicious-circle principle," because it enables us to avoid the vicious circles involved in the assumption of illegitimate totalities. Arguments which are condemned by the vicious-circle

* See the last section of the present Chapter. Cf. also H. Poincaré, "Les mathématiques et la logique," *Revue de Métaphysique et de Morale*, Mai 1906, p. 307.



Dans les Principia mathematica (1910-1913), Russell et Whitehead croyaient pouvoir fonder les mathématiques sur la seule logique, et en particulier donner une déduction purement logique de l'arithmétique des nombres naturels. Kurt Gödel, avec son théorème d'incomplétude (1931), a démontré qu'une telle construction est impossible. En effet, l'idée selon laquelle un système mathématique peut être « complet » n'est qu'une utopie : il existe des propositions qui sont indémontrables et en même temps irréfutables.
A gauche, portrait de Bertrand Russell (1872-1970) et une page des Principia mathematica.
Ci-contre, portrait de Kurt Gödel (1906) et un extrait de son grand article sur les indécidables.

Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I [1]).

Von **Kurt Gödel** in Wien.

1.

Die Entwicklung der Mathematik in der Richtung zu größerer Exaktheit hat bekanntlich dazu geführt, daß weite Gebiete von ihr formalisiert wurden, in der Art, daß das Beweisen nach einigen wenigen mechanischen Regeln vollzogen werden kann. Die umfassendsten derzeit aufgestellten formalen Systeme sind das System der Principia Mathematica (PM) [2]) einerseits, das Zermelo-Fraenkelsche (von J. v. Neumann weiter ausgebildete) Axiomensystem der Mengenlehre [3]) andererseits. Diese beiden Systeme sind so weit, daß alle heute in der Mathematik angewendeten Beweismethoden in ihnen formalisiert, d. h. auf einige wenige Axiome und Schlußregeln zurückgeführt sind. Es liegt daher die Vermutung nahe, daß diese Axiome und Schlußregeln dazu ausreichen, alle mathematischen Fragen, die sich in den betreffenden Systemen überhaupt formal ausdrücken lassen, auch zu entscheiden. Im folgenden wird gezeigt, daß dies nicht der Fall ist, sondern daß es in den beiden angeführten Systemen sogar relativ einfache Probleme aus der Theorie der gewöhnlichen ganzen Zahlen gibt [4]), die sich aus den Axiomen nicht

[1]) Vgl. die im Anzeiger der Akad. d. Wiss. in Wien (math.-naturw. Kl.) 1930, Nr. 19 erschienene Zusammenfassung der Resultate dieser Arbeit.

[2]) A. Whitehead und B. Russell, Principia Mathematica, 2. Aufl., Cambridge 1925. Zu den Axiomen des Systems PM rechnen wir insbesondere auch: Das Unendlichkeitsaxiom (in der Form: es gibt genau abzählbar viele Individuen), das Reduzibilitäts- und das Auswahlaxiom (für alle Typen).

[3]) Vgl. A. Fraenkel, Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre, Wissensch. u. Hyp. Bd. XXXI. J. v. Neumann, Die Axiomatisierung der Mengenlehre. Math. Zeitschr. 27, 1928. Journ. f. reine u. angew. Math. 154 (1925), 160 (1929). Wir bemerken, daß man zu den in der angeführten Literatur gegebenen mengentheoretischen Axiomen noch die Axiome und Schlußregeln des Logikkalküls hinzufügen muß, um die Formalisierung zu vollenden. — Die nachfolgenden Überlegungen gelten auch für die in den letzten Jahren von D. Hilbert und seinen Mitarbeitern aufgestellten formalen Systeme (soweit diese bisher vorliegen). Vgl. D. Hilbert, Math. Ann. 88, Abh. aus d. math. Sem. der Univ. Hamburg I (1922), VI (1928). P. Bernays, Math. Ann. 90. J. v. Neumann, Math. Zeitschr. 26 (1927). W. Ackermann, Math. Ann. 93.

[4]) D. h. genauer, es gibt unentscheidbare Sätze, in denen außer den logischen Konstanten: $\overline{}$ (nicht), $\vee$ (oder), (x) (für alle), $=$ (identisch mit) keine anderen Begriffe vorkommen als $+$ (Addition), . (Multiplikation), beide bezogen auf natürliche Zahlen, wobei auch die Präfixe (x) sich nur auf natürliche Zahlen beziehen dürfen.

ou du Soleil), même les mathématiciens les plus perspicaces étaient convaincus que leur « raisonnement » était essentiellement valide et que les résultats décrivaient le fonctionnement de la nature.

Le choc des géométries non euclidiennes.

Plusieurs événements vinrent ébranler la confiance des mathématiciens dans la justesse et la vérité de leurs résultats. Le plus important fut la création des géométries non euclidiennes, fondée sur la possibilité de choisir un groupe d'axiomes différents de ceux d'Euclide et de construire un corps de théorèmes également différents de ceux d'Euclide. Pour les axiomes, la différence centrale porte sur l'axiome des parallèles : contrairement à Euclide qui pose que, par un point donné du plan, il passe une droite et une seule qui ne rencontre pas une droite donnée, on peut poser soit qu'il en passe plusieurs, soit qu'il n'en passe aucune. Un tel choix a de lourdes conséquences : ainsi, au lieu que la somme des angles d'un triangle soit égale à 180°, elle sera, selon les cas, inférieure ou supérieure à cette valeur. De même, la différence entre la similitude et la congruence des triangles sera effacée : deux triangles semblables devront être congruents.

Le simple fait qu'il puisse exister d'autres géométries que celle d'Euclide porta un coup aux mathématiques, mais la création de géométries non euclidiennes eut de plus terribles conséquences. D'abord, en travaillant sur ces géométries, on s'aperçut que la logique de la géométrie euclidienne était imparfaite à un point inquiétant. Car Euclide avait donné beaucoup de définitions dépourvues de sens, omis de définir un certain nombre de concepts dont il faisait pourtant usage, et, le pis de tout, avait inconsciemment employé des axiomes jamais énoncés. Pour le dire brutalement, la structure logique d'Euclide apparut terriblement insatisfaisante.

Aussi, en matière de preuves, les mathématiques semblaient vers 1850 dans un état désespéré. Etant donné la prodigieuse avancée de l'analyse entre la fin du XVII[e] siècle et le début du XIX[e] siècle, 95 % des mathématiques — tout ce qui reposait sur l'arithmétique — étaient dépourvues de tout fondement logique. Il n'y avait qu'une partie du sol (la géométrie euclidienne) qu'on tenait pour solide ; et voilà qu'elle aussi se révélait marécageuse !

La création des géométries non euclidiennes fit ensuite réexaminer le second caractère essentiel des mathé-

Mathématicien et auteur de plusieurs ouvrages sur les mathématiques, **Morris Kline** enseigne au Courant Institute of Mathematical Sciences et à Brooklyn College (New York).

En 1900, Poincaré crut pouvoir affirmer que les mathématiques avaient atteint une rigueur parfaite. C'était prématuré.

matiques, à savoir leur vérité. Carl Gauss, le principal responsable de cette création, comprit aussitôt qu'on pourrait appliquer ces nouvelles géométries au monde physique, et bientôt il fut convaincu qu'on pouvait au moins utiliser l'une d'elles. Autrement dit, tout en restant dans les limites d'exactitude des observations et des mesures, il était possible de décrire l'espace physique avec l'une ou l'autre de ces différentes géométries. Mais si plusieurs géométries qui sont, au moins en partie, mutuellement contradictoires peuvent décrire l'espace, alors vraiment nous ne savons pas ce qui est vrai au sujet de l'espace physique. Tout ce que nous pouvons dire, c'est que, si nous attribuons à l'espace les propriétés énoncées dans les axiomes d'une certaine géométrie, euclidienne ou pas, alors les mathématiques nous indiqueront les conséquences de cette attribution. La géométrie, dans ces conditions, ne nous fournit certainement pas des vérités sur le monde physique.

Les géométries non euclidiennes, ce triomphe de la raison, semèrent les germes d'un désastre intellectuel. Pour un temps, les mathématiciens, y compris Gauss, se tournèrent vers l'arithmétique, l'algèbre et l'analyse, en disant que là se trouvait la vérité des mathématiques. Mais au XIX^e siècle on créa de nouvelles algèbres, avec respectivement les quaternions, les vecteurs et les matrices, algèbres qui ne respectent pas toutes les règles de l'arithmétique ordinaire. Par exemple, la multiplication des deux quaternions ou de deux matrices n'est, en général, pas commutative : alors que $3 \times 4 = 4 \times 3$, pour des quaternions a et b, $ab \neq ba$. On commença à comprendre qu'il y a non pas une, mais des algèbres, comme il y a des géométries. Ainsi l'algèbre ordinaire était aussi une œuvre humaine ; rien n'assurait que ses lois s'appliquaient au monde physique, et en fait cela n'a rien de nécessaire. Ainsi, si l'on mélange 2 cm^3 d'hydrogène gazeux et 1 cm^3 d'oxygène gazeux, on n'obtient pas 3 cm^3 de vapeur d'eau, mais seulement 2. Rien ne garantit donc que l'arithmétique doit s'appliquer au monde physique. L'algèbre et l'arithmétique n'offrent pas, elles non plus, des vérités.

Ce qui permit aux mathématiciens de survivre, ce fut le puissant remède que représentaient les merveilleux succès de leur science : en mécanique céleste, en acoustique, en dynamique des fluides, en résistance des matériaux, en optique, en électricité, en magnétisme, dans les sciences de l'ingénieur, les mathématiques permettaient des prédictions d'une incroyable exactitude. Il fallait reconnaître un pouvoir essentiel, peut-être magique, à cette discipline : bien qu'elle se fût abusivement placée sous la protection invincible de la vérité, elle avait remporté de telles victoires grâce à quelque mystérieure force intérieure. Il restait à expliquer l'extraordinaire aptitude des mathématiques à s'appliquer à la nature, mais le fait en soi était indéniable, et personne

> **Géométrie imaginaire.**
>
> (Par Mr. *N. Lobatschewsky*, recteur de l'université de Cazan.)
>
> Il y a à peu près cinq ans que j'ai fait insérer dans un journal scientifique qui paraissait à Cazan, quelques articles sur les élémens de la géométrie. Après y avoir développé une nouvelle théorie des parallèles, j'ai tâché de prouver que rien n'autorise, si ce ne sont les observations directes, de supposer dans un triangle rectiligne la somme des angles égale à deux angles droits, et que la géométrie n'en peut pas moins exister, si non dans la nature, au moins dans l'analyse, lorsqu'on admet l'hypothèse de la somme des angles moindre que la démicirconférence du cercle. Dans les articles cités j'étais même parvenu, par des considérations toujours géo-

En 1829, Nikolaï Ivanovitch Lobatchevski (1792-1856) avait fait paraître en russe, dans le Courrier de Kazan, un premier article sur la géométrie non euclidienne (hyperbolique). Mais c'est l'article publié en 1837 dans le Journal für die reine und angewandte Mathematik qui fit véritablement connaître la nouvelle « géométrie imaginaire ».

n'osait se priver de cet outil tout-puissant. Ainsi les mathématiques conservèrent leur place dans le monde intellectuel comme dans celui des sciences.

Mais le prestige des mathématiciens avait souffert. Qu'est-ce qui distinguerait, désormais, les nobles spéculations mathématiques des recherches terre à terre des autres scientifiques ? L'espoir de rendre la vérité aux mathématiques était à jamais perdu. Mais il était possible de rendre à la géométrie la rigueur des démonstrations, et d'introduire également dans les structures de l'arithmétique, de l'algèbre et de l'analyse des démonstrations rigoureuses.

Dans la seconde moitié du XIX^e siècle, les mathématiciens donnèrent à leur discipline des fondements logiques appropriés. Un mouvement dit critique, commencé avec Bernard Bolzano et Augustin-Louis Cauchy, continué par Karl Weierstrass, Richard Dedekind, Georg Cantor, Giuseppe Peano, d'autres encore, donna pour la première fois à l'arithmétique, à l'algèbre et à l'analyse une base axiomatique. Grâce à Moritz Pasch, à David Hilbert, etc., la géométrie euclidienne et les autres géométries reçurent une meilleure base axiomatique. Travaillant sur la question des fondements, Cantor, obligé de manier des collections variées de points et de nombres, créa une nouvelle branche des mathématiques dont on parle beaucoup aujourd'hui : la théorie des ensembles. Vers 1900, la stricte base logique des mathématiques était, en apparence, devenue parfaite. Au congrès de mathématiques réuni à Paris en 1900, Henri Poincaré, le plus grand mathématicien de son temps, affirma avec orgueil : « A présent nous pouvons dire qu'on a atteint la rigueur parfaite. »

La crise.

Si elle s'était achevée alors, l'histoire du développement des fondements des mathématiques aurait connu une fin heureuse. Mais la satisfaction procurée par la perfection logique récemment atteinte fut de courte durée. Les mathématiques étaient maintenant constituées par un ensemble de structures plutôt arbitraires, qui reposaient chacune sur son propre ensemble d'axiomes. Ces structures n'étaient pas des vérités, mais alors comment savoir si elles étaient consistantes ? En effet, chaque structure contient des centaines de théorèmes déduits des axiomes : et si deux d'entre eux étaient contradictoires ? Si cela arrivait, le développement tout entier en deviendrait absurde. Antérieurement, c'était la vérité supposée des mathématiques qui garantissait leur consistance, car par nature la vérité ne pouvait contenir de contradictions.

Ce problème fut aggravé par la découverte du caractère auto-contradictoire de certains concepts utilisés dans la théorie des ensembles, c'est-à-dire justement dans l'une des branches crées pour assurer la rigueur des mathématiques. On nomma ces contradictions des *paradoxes*, par un euphémisme qui évitait de regarder la vérité en face. En voici quelques exemples traduits en langage courant, mais chacun d'eux a des correspondants mathématiques.

Bertrand Russell, en 1919, énonça l'un d'eux sous la forme célèbre du « paradoxe du barbier ». Un barbier se vante en ville de raser tous ceux qui ne se rasent pas eux-mêmes, mais évidemment il ne rase pas ceux qui se rasent eux-mêmes. Doit-il se raser lui-même ? Il est clair, s'il le fait, qu'il ne le doit pas, et s'il ne le fait pas, qu'il le doit.

Le fameux « paradoxe de Russel » fournit un autre exemple. Une classe de livres n'est pas un livre, mais une classe d'idées est une idée. Donc il y a des classes qui appartiennent à elles-mêmes et d'autres qui ne le font pas. Soit M la classe de toutes les classes membres d'elles-mêmes, et N la classe de toutes les classes qui ne sont pas membres d'elles-mêmes. A l'évidence, M et N s'excluent mutuellement, mais à elles deux, elles incluent toutes les classes. Or N est elle-même une classe : appartient-elle à M ou à N ? Si N appartient à N, c'est une classe qui appartient à elle-même et, à ce titre, elle doit appartenir à M. Si N appartient à M, alors elle n'appartient pas à N, puisque M et N s'excluent mutuellement. Si N n'appartient pas à N, c'est-à-dire si N n'appartient pas à elle-même, alors, d'après la définition de N, elle doit appartenir à N.

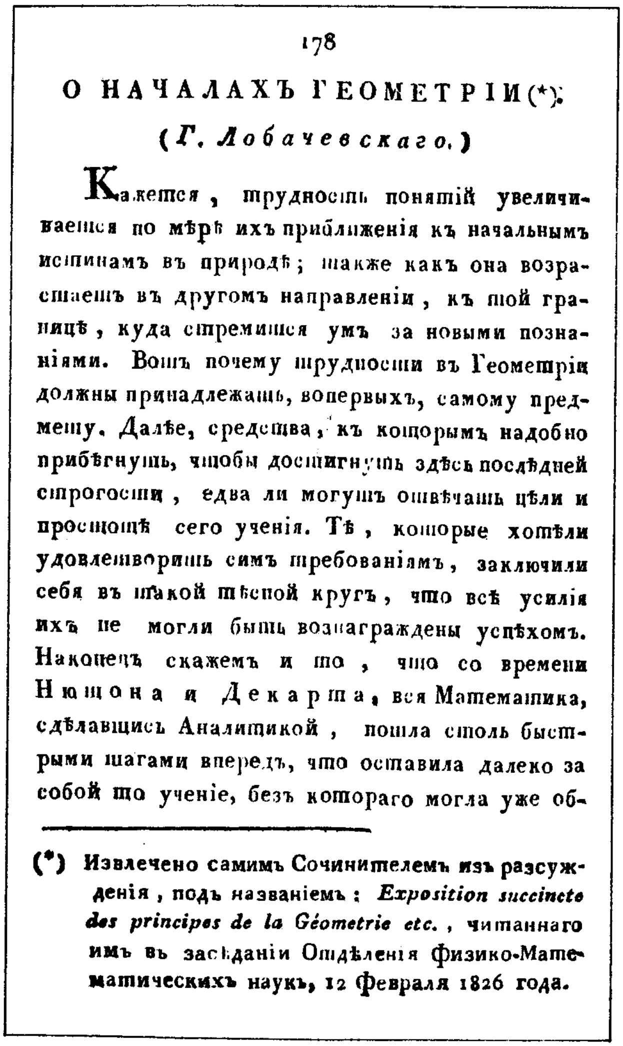
Enfin considérons le paradoxe de Jules Richard (1905). Tout nombre entier peut être décrit de diverses manières avec des mots. Ainsi cinq peut être désigné par le seul mot « cinq » ou par la phrase « le nombre entier qui vient juste après quatre ». Prenons la description qui contient le plus petit nombre de lettres et donnons-lui le nom de description minimale. Considérons maintenant tous les nombres entiers qu'on peut décrire avec 100 lettres au plus dans l'alphabet anglais. Pour chacune d'elles il y a 26 choix ou bien aucun choix, soit 27 choix en tout. Donc, au plus, il y a 27^{100} descriptions possibles ; même si chacune d'elles constitue une description minimum dotée de sens, il y a au plus un nombre fini de nombres susceptibles d'être décrits par les 27^{100} descriptions. Soit « le plus petit nombre qui n'est pas descriptible en 100 lettres au plus » : ce faisant, nous le décrivons en moins de 100 lettres.

Comme le mit en évidence Poincaré, la racine de ces paradoxes tient au fait qu'on définit un objet en termes d'une classe d'objets qui inclut l'objet défini. En formulant une définition, on peut facilement laisser passer ce caractère circulaire. Supposons qu'on définisse l'ensemble S comme étant la collection de tous les ensembles qu'on peut définir en 25 mots au plus. Comme nous venons de définir S en moins de 25 mots, S est inclus dans la classe des ensembles par laquelle il est défini. En réalité on a fait librement usage de telles définitions en mathématiques.

Ainsi la question de la consistance des mathématiques avait perdu son caractère académique. Les paradoxes montraient que les mathématiques n'étaient pas consistantes et, bien que quelques mathématiciens aient commencé, avant 1900, à reconsidérer la nature des mathématiques et l'acceptabilité des méthodes classiques de preuve, le principal effort visa d'abord à éliminer les paradoxes. Pour ceux qui avaient travaillé dur, juste avant 1900, pour établir des fondements logiques, le moyen à utiliser était l'axiomatisation, c'est-à-dire l'explicitation des axiomes et des définitions, suivie de la déduction des théorèmes. Parce que les paradoxes apparaissaient surtout dans la théorie des ensembles, on chercha à axiomatiser ce domaine, que Cantor avait présenté de façon assez informelle. Entreprise par Ernst Zermelo en 1908, cette axiomatisation fut améliorée par Abraham A. Fraenkel quelques années plus tard. L'un des axiomes retenus était l'*axiome du choix* : dans une collection, finie ou non, d'ensembles, on peut choisir un élément et un seul dans chaque ensemble et constituer ainsi un nouvel ensemble. Cet axiome d'apparence évidente et fort acceptable souleva une tempête de protestations. Certains lui reprochèrent d'être trop vague. Si l'on ne spécifie pas l'élément choisi dans chaque ensemble, le nouvel ensemble obtenu reste indéfini et donc dénué de sens. C'est pourquoi, tout en ayant le mérite d'éliminer la plupart des paradoxes, l'axiomatisation de la théorie des ensembles ne pouvait satisfaire tous les mathématiciens.

De plus, ni Zermelo ni ses proches successeurs ne cherchèrent à prouver la consistance de la théorie des ensembles, si bien qu'elle restait à la merci de la découverte d'autres contradictions. Comme le disait Poincaré : nous avons enclos notre troupeau, mais peut-être y a-t-il déjà des loups dans la bergerie.

Comme on sait, un ennui n'arrive jamais seul... Dans sa théorie des ensembles, Cantor avait audacieusement manié des ensembles infinis et même introduit entre eux certaines distinctions. Ainsi il désigna le nombre des entiers positifs $\aleph_0$ (aleph zéro), puis montra que le nombre de tous les sous-ensembles des entiers positifs était égal à $2^{\aleph_0}$, — ce qui, soit dit en passant, se révéla être le nombre de tous les nombres réels. Enfin Cantor, à partir de considérations tout autres,


178

О НАЧАЛАХЪ ГЕОМЕТРІИ(*).

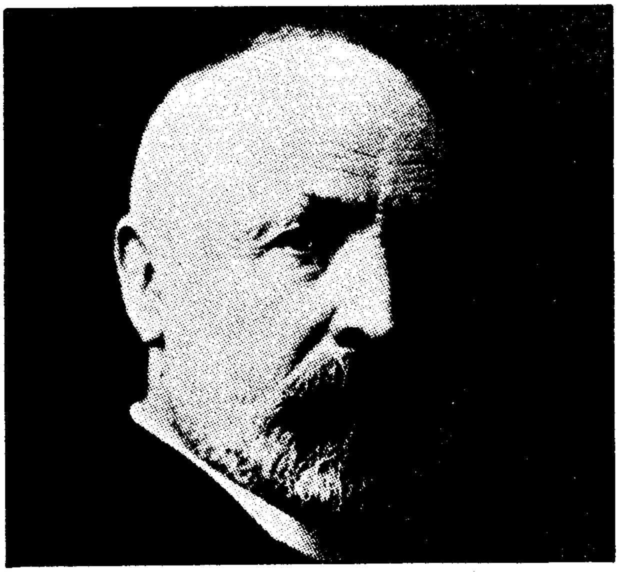
(*Г. Лобачевскаго.*)

Кажется, трудность понятій увеличивается по мѣрѣ ихъ приближенія къ начальнымъ истинамъ въ природѣ; также какъ она возрастаетъ въ другомъ направленіи, къ той границѣ, куда стремится умъ за новыми познаніями. Вотъ почему трудности въ Геометріи должны принадлежать, вопервыхъ, самому предмету. Далѣе, средства, къ которымъ надобно прибѣгнуть, чтобы достигнуть здѣсь послѣдней строгости, едва ли могутъ отвѣчать цѣли и простотѣ сего ученія. Тѣ, которые хотѣли удовлетворить симъ требованіямъ, заключили себя въ такой тѣсной кругъ, что всѣ усилія ихъ не могли быть вознаграждены успѣхомъ. Наконецъ скажемъ и то, что со времени Нютона и Декарта, вся Математика, сдѣлавшись Аналитикой, пошла столь быстрыми шагами впередъ, что оставила далеко за собой то ученіе, безъ котораго могла уже об-

(*) Извлечено самимъ Сочинителемъ изъ разсужденія, подъ названіемъ: *Exposition succincte des principes de la Géometrie etc.*, читаннаго имъ въ засѣданіи Отдѣленія Физико-Математическихъ наукъ, 12 Февраля 1826 года.

Dans les Principia mathematica, Russell et Whitehead essayèrent d'éliminer certains paradoxes gênants, grâce à la « théorie des types ». Mais il restait divers points obscurs.

Georg Cantor (1845-1918).



définit un nouveau nombre, dit transfini, $\aleph_1$ (aleph un) et prouva que $\aleph$ était plus grand que $\aleph_0$. Pouvait-on établir que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$? Cantor supposa que $2^{\aleph_0} \leqslant \aleph_1$; cette conjecture a reçu le nom d'*hypothèse du continu.*

Russell et Whitehead : le logicisme.

Vers 1910, une série de graves difficultés subsistait : en particulier le problème de la consistance et certains aspects de méthodologie mathématique tenus pour insatisfaisants dès avant 1900. Certains mathématiciens émettaient des doutes sur la valeur jusque-là supposée universelle de la logique commune en usage en mathématiques. Pour résoudre ces différentes questions, trois « écoles » se constituèrent. En premier lieu, il y eut le logicisme fondé principalement par Russell et Alfred North Whitehead. Pour eux, les mathématiques provenaient de la logique, dont elles constituaient une extension. Cette thèse fut esquissée par Russell dans ses *Principles of Mathematics* (1903) et développée en détail par lui et Whitehead dans leur ouvrage commun : *Principia mathematica* (3 volumes, 1910-1913). Dans l'idée de Russell, l'avantage était de garantir ainsi la consistance des mathématiques, puisque la logique est incontestablement consistante et que les mathématiques sont réduites, par cette méthode, à une série de déductions à partir de principes logiques.

L'école logiciste commence par développer la logique elle-même d'où dérivent ensuite les mathématiques, sans ajout d'axiomes supplémentaires. Pour la logique, on établit quelques axiomes desquels on déduit les théorèmes utilisés dans la suite des raisonnements : ainsi les lois logiques dérivent formellement des axiomes. Certes, dans les *Principia*, il reste encore des idées non définies, comme dans toute théorie axiomatique, car il est impossible de définir tous les termes, sauf à s'engager dans une suite infinie de définitions. Ainsi ne sont pas définies les notions de proposition élémentaire, de fonction propositionnelle, de vérité d'une proposition élémentaire, de négation d'une proposition et de disjonction de deux propositions. Russell et Whitehead expliquent ces notions, tout en indiquant que ces explications se situent en marge du développement logique.

La structure complète des *Principia* est extrêmement complexe. Une proposition est une phrase *(sentence)* qui énonce un fait ou une relation : par exemple, « Jean est un homme ». Une fonction propositionnelle contient une variable : par exemple, « x est un entier ». Si on substitue 2 à la variable *x*, on obtient une proposition. Si les éléments d'un ensemble sont des objets individuels, les fonctions propositionnelles qui s'appliquent à ces éléments sont dites de type 0. Quand les éléments d'un ensemble sont eux-mêmes des fonctions propositionnelles, toute fonction propositionnelle qui s'applique à eux est dite de type 1. Et de façon générale, si une fonction contient des variables soit égales, soit inférieures à n, cette fonction est de type (n + 1).

La théorie des types cherche à éviter les paradoxes qu'engendre une collection d'objets contenant un élément définissable seulement en termes de cette collection. Dans cette intention, Russell et Whitehead décidèrent que « tout ce qui inclut tous les éléments d'une collection ne doit pas être soi-même un élément de cette collection ». Ainsi, une fonction propositionnelle ne peut admettre pour argument quelque chose de défini en termes de la fonction même.

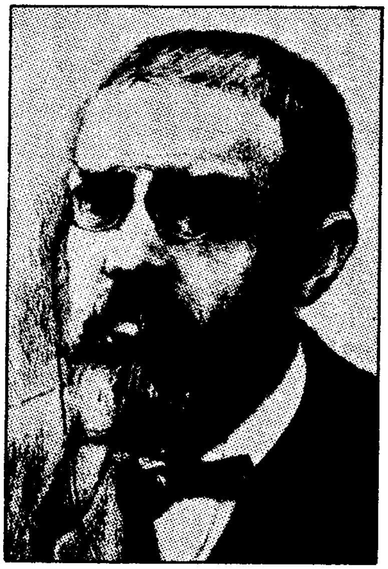
Cependant cette théorie conduisait à distinguer selon leur type les classes d'énoncés, d'où un développement extrêmement compliqué pour le moindre fragment mathématique. Par exemple, dans les *Principia*, deux objets *a* et *b* sont égaux si, pour toute propriété P(x), et P(a) et P(b) sont des propositions équivalentes (chaque proposition implique l'autre). Mais P peut être de différents types, car elle peut contenir des variables d'ordres divers comme les objets individuels *a* ou *b*. Or la définition de l'égalité doit être applicable à tous les types de P, d'où la nécessité d'une infinité de relations d'égalité, une pour chaque type. De même un nombre irrationnel est de type plus élevé qu'un rationnel, lequel, à son tour, est de type plus élevé qu'un entier : ainsi la suite des nombres s'ordonne en différents types. Pour pallier cette complexité, Russell et Whitehead eurent recours à l'*axiome de réductibilité* qui affirme l'existence, pour toute fonction propositionnelle de n'importe quel type, d'une fonction équivalente de type zéro.

De cette manière, le logicisme fondait les mathématiques sur la logique : il n'était nul besoin d'avoir des axiomes propres aux mathématiques, et celles-ci se voyaient réduites à une extension naturelle des lois et du domaine de la logique. Ce point de vue fut fort critiqué. On rejeta l'axiome de réductibilité, à cause de son caractère arbitraire, considérant qu'il n'avait aucune place en mathématiques et, de soi, ne pouvait rien prouver. D'ailleurs, le système des *Principia* demeure incomplet et contient nombre de détails obscurs. Il a suscité, par la suite, bien des travaux de simplification et de clarification.

De plus, la thèse logiciste fait des mathématiques une science logico-déductive et rien d'autre, dont les théorèmes découlent des lois de la pensée. Mais, comme Russell devait le reconnaître, les postulats de logique et toutes leurs conséquences sont arbitraires et formels, en ce sens qu'ils ont seulement une forme sans contenu. En conséquence les mathématiques, elles aussi, n'ont pas de contenu mais seulement une forme. Les significations physiques que nous donnons aux nombres ou aux concepts géométriques ne font pas partie des mathématiques. D'où la boutade de Russell : les mathématiques sont un domaine où nous ne savons jamais de quoi nous parlons, ni si ce que nous disons est vrai. Comment alors cet appareil de déductions tirées des lois de la pensée peut-il représenter des phénomènes naturels aussi divers, relevant de l'acoustique, de l'électromagnétisme ou de la mécanique ? Enfin la création mathématique nécessite le secours de l'intuition perceptive ou imaginaire pour engendrer de nouveaux concepts, dérivés ou non de l'expérience. Sinon, comment produire de nouvelles connaissances ?

Le formalisme du programme logistique ne représente aucunement la réalité des mathématiques ; il en atteint l'écorce, et non pas le noyau. Sarcastique, Poincaré remarqua : « la théorie logistique n'est pas stérile, puisqu'elle engendre des contradictions ». C'est inexact si l'on accepte la théorie des types, mais celle-ci est

Henri Poincaré (1854-1912).



artificielle. Hermann Weyl, un mathématicien allemand de première valeur, attaqua aussi le logicisme, dont la structure complexe « affaiblit notre foi presque autant que les doctrines des Pères de l'Eglise ou de la scolastique médiévale ». De nombreux mathématiciens, cependant, acceptèrent la thèse logiciste. De plus, le travail de Russell et Whitehead eut le mérite de proposer une axiomatisation de la logique sous une forme entièrement symbolique, ce qui fit considérablement progresser la logique mathématique.

Brouwer et l'intuitionnisme.

Une voie radicalement différente fut suivie par les intuitionnistes à partir de la fin du XIX^e siècle, quand tout le monde cherchait à fonder le système des nombres et la géométrie. Le fondateur de l'intuitionnisme moderne pris comme un système est le mathématicien hollandais Luitzen E.J. Brouwer. Une grande partie de ses travaux mathématiques, notamment en topologie, ne s'accorde pas à sa propre philosophie, mais on ne saurait douter du sérieux de ses prises de position en la matière. Dès sa thèse de doctorat *Sur les fondements des mathématiques* (1907), Brouwer commença à construire l'édifice intuitionniste. Pour lui, l'intuition fondamentale, c'est que nous ayons des perceptions différentes à des instants successifs. Nous percevons successivement l'existence de différentes paires d'objets, puis nous abstrayons de toutes ces manifestations particulières la notion de paire. Ainsi la forme vide qui reste commune à toutes les paires devient l'intuition originale des mathématiques (c'est la relation de n à $n + 1$). Donc, par une répétition indéfinie, l'esprit forme le concept des nombres naturels successifs. L'idée que les entiers dérivent de l'intuition temporelle avait déjà été soutenue par Kant, par William R. Hamilton dans son *Algèbre comme science du temps*, et par le philosophe Arthur Schopenhauer.

Brouwer conçoit la pensée mathématique comme un processus de construction qui édifie son propre univers, indépendant de celui de l'expérience et sans modèle, avec cette seule restriction qu'il faut se baser sur l'intuition mathématique fondamentale. Celle-ci ne constitue pas une idée non définie, comme dans les théories fondées sur des postulats, mais elle fournit les termes dans lesquels seront intuitivement conçues toutes les idées non définies qui ont cours dans les divers systèmes mathématiques quand on désire les utiliser. Selon Brouwer, « dans ce processus de construction, soumis à l'obligation de noter avec soin les thèses intuitivement acceptables et celles qui ne le sont pas, réside le seul fondement possible pour les mathématiques ».

Les idées mathématiques sont antérieures dans l'esprit humain au langage, à la logique et à l'expérience. C'est l'intuition, et non l'expérience ou la logique, qui détermine la justesse et l'acceptabilité des idées. Mais toutes ces considérations sur le rôle de l'intuition sont à entendre dans un sens philosophique, et pas dans un sens historique. Ainsi, pour Brouwer, les objets mathématiques sont acquis par une construction de l'intellect, dont l'acquisition des nombres de base (1, 2, 3, ...) fournit le prototype. La possibilité de répéter indéfiniment le passage de n à $n + 1$ conduit à constituer des ensembles infinis. L'infini de Brouwer n'est que l'infini potentiel d'Aristote, tandis que les mathématiques modernes, telles que les fondait Cantor par exemple, font un usage extensif d'ensembles véritablement infinis dont tous les éléments sont présents au même instant.

En relation avec la notion d'ensemble infini, Hermann Weyl, intuitionniste également, écrivait : « la suite des nombres qui se continue indéfiniment [...] est une multitude de possibilités ouvertes à l'infini ; elle reste à jamais en état de création, ce n'est pas un royaume clos d'entités existant en soi. Pour avoir aveuglément transformé l'un en l'autre, nous avons suscité une source de difficultés, dont les antinomies [autre nom des paradoxes] ; et cette source est de nature plus fondamentale que ne l'indiquait le principe du cercle vicieux de Russell. Brouwer nous a ouvert les yeux et montré combien les mathématiques classiques, appuyées sur une croyance en l'absolu transcendant toutes les possibilités de réalisation des hommes, dépassent les énoncés qui peuvent prétendre à un sens réel et à une vérité fondée sur l'évidence. »

Le monde de l'intuition mathématique s'oppose à celui des perceptions causales. A ce dernier appartient le langage qui sert à comprendre le jeu des relations ordinaires. Mots et enchaînements verbaux servent à communiquer des vérités. A l'aide de sons et de symboles, le langage entend donner la copie des idées humaines, mais on ne peut jamais complètement symboliser les pensées. Cela vaut aussi pour le langage mathématique, même dans sa forme symbolique : les idées mathématiques sont indépendantes du vêtement que leur offre le langage, et en fait elles le dépassent en richesse.

La logique appartient au langage. Elle donne un système de règles qui permet de déduire d'autres enchaînements verbaux. Néanmoins ces vérités (secondes), ne sont pas telles avant qu'il en soit fait l'expérience ; et on ne saurait pas davantage garantir que leur expérience soit possible. La logique n'est pas un instrument auquel se fier pour découvrir des vérités, elle ne peut servir à déduire des vérités non atteignables par quelque autre voie. Les principes logiques se confondent avec la régularité qu'on peut observer a posteriori dans le langage. Autrement dit, ils constituent un moyen de manier le langage, ou encore la théorie de la représentation linguistique. Ce n'est pas en perfectionnant la forme logique, mais en modifiant la théorie de base qu'on réalise les plus grands progrès mathématiques. La logique repose sur les mathématiques, et non l'inverse.

Puisque Brouwer n'admet aucun principe logique comme obligatoire a priori, il n'admet pas le souci mathématique de déduire des conclusions à partir d'axiomes. Les mathématiques ne sont pas tenues de respecter les règles logiques, aussi les paradoxes sont-ils sans importance, même quand on accepte les concepts et les constructions qui y touchent. Ces concepts et ces preuves d'ailleurs, les intuitionnistes ne les acceptent pas tous. L'un des buts de l'école fut de trier entre les principes logiques pour rendre la logique usuelle conforme, en elle-même et dans ses modes d'expression, aux intuitions correctes. Brouwer cite le principe du tiers exclu comme un exemple de trop libre utilisation. Ce principe affirme que tout énoncé doté de sens est ou vrai ou faux ; il joue un rôle de base dans la méthode

Hilbert, leader de l'école formaliste, pensait avoir résolu le problème de la « consistance » des mathématiques. Mais Kurt Gödel, en 1931, montra qu'il n'en était rien.

de démonstration indirecte. Historiquement, il est venu du maniement d'ensembles finis ; abstrait, puis accepté comme principe indépendant a priori, il fut, sans autre justification, appliqué aux ensembles infinis. Dans un ensemble fini, on peut vérifier pour tout élément, en les prenant un à un, s'il possède ou non la propriété P ; cela devient impossible pour un ensemble infini. Pour un tel ensemble, il arrive que l'on sache qu'un élément ne possède pas la propriété en question ; ou il peut se faire que, selon le mode de construction de l'ensemble, on sache, ou on puisse prouver, que chaque élément possède la propriété. En tout cas, on ne peut ici recourir au principe du tiers exclu.

Si l'on prouve que les éléments d'un ensemble infini ne possèdent pas tous une propriété, la conclusion « il existe au moins un élément qui ne la possède pas » est rejetée par Brouwer. Par exemple, une fois nié le fait que $a^b = b^a$ soit vérifié, les intuitionnistes n'en concluent pas que, pour tous les nombres, il existe bien un *a* et un *b* tels que $a^b \neq b^a$. L'existence d'un tel *a* et d'un tel *b* devra être démontrée par une preuve constructive. En conséquence, les intuitionnistes rejettent nombre de démonstrations d'existence. Et le recours au principe du tiers exclu n'est admis que s'il est possible d'atteindre la conclusion visée en un nombre fini d'étapes, par exemple s'il s'agit de décider si un livre contient des fautes d'impression. Dans les autres cas, les intuitionnistes nient qu'une décision soit possible. En restreignant l'usage du principe du tiers exclu, on engendre des propositions indécidables, c'est-à-dire des énoncés dont pour les ensembles *infinis*, on ne peut prouver ni la vérité ni la fausseté.

Les intuitionnistes réclament des définitions constructives des concepts utilisés. Pour eux, l'infini existe en ce sens qu'on peut toujours trouver un ensemble fini plus grand qu'un ensemble donné. Mais, pour discuter de tout autre type d'infini, ils réclament qu'on en donne une méthode de construction ou de définition réalisable en un nombre fini d'étapes. Cette exigence les pousse à exclure tout objet dont l'existence est établie par un raisonnement indirect, c'est-à-dire en prouvant que supposer sa non-existence conduit à une contradiction.

Brouwer et son école ne se sont pas limités à critiquer, ils ont cherché à bâtir une nouvelle mathématique sur la base des constructions acceptables à leurs yeux. Ils ont réussi à conserver le calcul infinitésimal, et son usage des limites, mais au prix d'une construction très compliquée. Ils ont aussi rebâti des parties élémentaires de l'algèbre et de la géométrie. Mais il est clair que leurs mathématiques diffèrent radicalement de ce que les mathématiciens acceptaient presque universellement avant 1900.

Hilbert et le formalisme.

Hilbert fut le leader de l'école formaliste, la troisième des principales philosophies des mathématiques. Il commença à y travailler en 1904, avec l'intention de fonder le système des nombres sans recourir à la théorie des ensembles et d'établir la consistance de l'arithmétique. Ce dernier point était devenu crucial pour lui, puisqu'il avait établi la consistance de la géométrie en la réduisant à celle de l'arithmétique. Hilbert acceptait la notion d'infini actuel et louait grandement les travaux de Cantor. Il était aussi désireux de conserver les purs concepts et démonstrations d'existence, comme par exemple la plus petite borne supérieure dont la définition se révéla circulaire.

Il fit une communication sur ses thèses au congrès international de 1904. Puis il abandonna ce sujet pendant quinze ans. Alors, pour répondre aux critiques intuitionnistes dirigées contre l'analyse classique, il reprit la question des fondements et continua d'y travailler jusqu'à la fin de sa carrière. A partir de 1920, il publia plusieurs articles s'y rapportant et dont la valeur lui gagna un certain nombre de partisans. Les formalistes s'imposèrent de traiter la logique en même temps que les mathématiques. Dans ces dernières, chaque domaine distinct devait recevoir un fondement axiomatique, à l'aide de concepts et de principes logiques et mathématiques. La logique est un langage de signes qui nous permet de traduire les énoncés mathématiques en formules et les raisonnements en procédés formels. Les axiomes se bornent à exprimer les règles grâce auxquelles les formules découlent les unes des autres. Tous les signes et les symboles d'opération sont détachés de leur possible signification quant au contenu. Donc tout sens est éliminé des symboles mathématiques. En 1926, Hilbert écrivait que les objets de la pensée mathématique sont les symboles eux-mêmes. Les symboles sont l'essence de cette pensée, ils ne remplacent plus les objets physiques idéalisés. Les formules peuvent intuitivement impliquer des énoncés dotés de sens, mais ces implications ne font pas partie des mathématiques.

Parce que l'analyse repose sur lui, Hilbert conserve le principe du tiers exclu ; selon son expression, « interdire à un mathématicien d'utiliser le principe du tiers exclu équivaut à priver l'astronome de son télescope et le boxeur de ses poings ». Parce que les mathématiques ne traitent que des expressions symboliques, toutes les règles de la logique aristotélicienne sont applicables à ces expressions formelles. Dans cette nouvelle perspective, les mathématiques pouvaient manier des ensembles infinis. De plus, Hilbert pensait éviter les paradoxes en évitant l'usage explicite du mot « tout ».

Une démonstration mathématique consistera dans l'assertion d'une première formule, puis dans l'affirmation que celle-ci en implique une autre, d'où l'assertion de la seconde formule. Par ce procédé, répété plusieurs fois, on aboutira à l'assertion d'une formule finale qui sera l'implication des axiomes ou des conclusions antérieures et qui constituera la démonstration d'un théorème. De plus, il est permis de substituer un symbole, ou un groupe de symboles, à un autre. Ainsi les formules sont tirées de formules établies auparavant, par application des règles de maniement des symboles. Chacun peut vérifier si une proposition donnée a été obtenue à partir d'une suite appropriée d'autres propositions. Pour les formalistes, démonstration et rigueur ont un caractère bien défini et objectif.

Dans cette perspective, les mathématiques proprement dites sont une collection de systèmes formels dont chacun construit sa propre logique en même temps que son contenu mathématique, possède ses propres concepts, axiomes, règles de déduction des théorèmes (par exemple des règles concernant l'égalité ou la substitution), et ses propres théorèmes. La tâche des mathématiques consiste à développer chacun de ces systèmes déductifs : elles ne sont plus une discipline qui traite de quelque chose, mais une collection de systèmes formels où on obtient des expressions formelles à partir d'autres telles expressions au moyen de transformations formelles.

Hilbert et ses élèves Wilhelm Ackermann, Paul Bernays et John von Neumann définirent de 1920 à 1930 une méthode pour établir la consistance de tout système formel : elle est connue sous le nom de *Beweistheorie* (théorie de la démonstration) de Hilbert, ou encore *métamathématique*. Dans ce but, Hilbert proposait de recourir à une logique particulière, fondamentale et à l'abri de toute objection, en employant un mode de raisonnement concret et fini d'un genre admis universellement et très

David Hilbert (1862-1943) et Hermann Weyl (1885-1955).

proche des principes intuitionnistes. En étaient écartés des principes discutés, comme l'axiome du choix, la démonstration d'existence par la contradiction et l'induction transfinie. Au contraire, les démonstrations d'existence devaient être constructives. Comme un système formel peut ne pas avoir de limites, la métamathématique devait manier des concepts et des questions liées à des systèmes infinis, au moins de façon potentielle. Mais on devait se servir seulement de méthodes de démonstration d'ordre fini. Il ne devait y avoir aucune référence à un nombre infini de propriétés structurelles des formules ou à un nombre infini de manipulations des formules.

Kurt Gödel et les indécidables.

Parce que la consistance d'une grande partie des mathématiques classiques pouvait se réduire à celle de l'arithmétique des nombres naturels ou à la théorie des ensembles, la consistance de cette arithmétique fut au centre des préoccupations. Le groupe formaliste crut atteindre ce but ou en être très proche, une fois établie la consistance des systèmes formels simples. Mais en 1931 le premier grand texte de Kurt Gödel vint ruiner cet espoir. Dans cette étude « Sur les propositions formellement indécidables des *Principia mathematica* et les systèmes associés I », il montra qu'on ne peut établir la consistance d'un système comprenant la logique usuelle et la théorie des nombres à l'aide de la logique étroite, qui seule est permise en métamathématique. Selon le mot de Weyl à cette occasion, Dieu existe puisque les mathématiques sont consistantes, et le Diable existe aussi puisque nous ne pouvons prouver cette consistance.

Ce résultat de Gödel est d'ailleurs le corollaire d'un autre de ses résultats, encore plus étonnant, à savoir son théorème d'incomplétude : si une théorie formelle T qui contient la théorie des nombres est consistante et si les axiomes du système formel de l'arithmétique sont des axiomes ou des théorèmes de T, alors T est incomplète. C'est-à-dire qu'il existe dans la théorie des nombres un énoncé S tel que ni S ni non-S n'est un théorème de la théorie : il y a donc, dans la théorie des nombres, un énoncé vrai qu'on ne peut démontrer. Ce résultat s'applique au système de Russell et Whitehead, à celui de Zermelo et Fraenkel et à l'axiomatisation hilbertienne de la théorie des nombres.

L'incomplétude est une tare puisqu'un système formel se révèle incapable de démontrer toutes les assertions qu'il peut produire. Et, pour ajouter l'insulte à la blessure, il y a des assertions indécidables dans le système, mais dont on saisit intuitivement la vérité. On ne peut venir à bout de cette incomplétude en ajoutant S ou non-S aux axiomes du système ; car Gödel démontrait que *tout* système contenant la théorie des nombres doit contenir une proposition indécidable. Ainsi Brouwer faisait voir que l'intuitivement « certain » est moindre que le mathématiquement « démontré » et Gödel montrait que l'intuitivement « certain » dépasse le mathématiquement « démontrable ».

Autre conséquence, aucun système d'axiomes ne peut englober, non pas la totalité des mathématiques, mais une de leurs branches prise intégralement, car aucun système d'axiomes de ce genre n'est complet. Et la croyance de la fin du XIX^e siècle que les mathématiques sont coextensives à la collection des branches axiomisées, c'est-à-dire la foi dans l'axiomatisation, était ruinée. La seule ressource restante était de trouver de nouvelles méthodes de démonstration qui dépasseraient celles permises dans la métamathématique de Hilbert.

Couronné de succès ou non, le programme formaliste était en soi inacceptable pour les intuitionnistes. Brouwer flétrit l'entreprise en 1925 : certes, des traitements axiomatiques formalistes permettront d'éviter les contradictions, mais ils ne produiront rien d'intéressant en mathématiques. Une théorie fausse demeure fausse même si on n'y trouve pas de contradiction, tout comme un acte criminel reste criminel, qu'il soit ou non condamné par un tribunal. Sarcastique, Brouwer notait : « A la question de savoir où trouver la rigueur mathématique, les deux camps donnent des réponses différentes. Les intuitionnistes disent : dans l'esprit humain ; et les formalistes disent : sur le papier. » Weyl aussi critique le programme hilbertien : « Les mathématiques de Hilbert sont un jeu agréable de formules, plus plaisant même que les échecs. Mais quel rapport a-t-il avec la connaissance, puisque ses formules, comme on l'avoue, n'ont aucun sens matériel grâce auquel on puisse exprimer des vérités intuitives ? » C'était négliger l'intention initiale des formalistes, à savoir établir la consistance, la complétude et d'autres propriétés des mathématiques. Sur le fond, les formalistes ne voulaient pas réduire les mathématiques à un simple jeu ; au contraire ils y voyaient une science objective.

En réponse, Hilbert accusa Brouwer et Weyl de chercher à se débarrasser de tout ce qui ne les arrangeait pas, de sorte que l'intuitionnisme n'était plus que « trahison de la science ». Quoi qu'il en soit, il fallait reconnaître l'échec : aucune des solutions proposées à la question des fondements n'arrivait à satisfaire tout le monde ni à démontrer la consistance. Depuis 1931, rien n'est venu y porter remède, les choses se sont plutôt compliquées que résolues.

Deux résultats ultérieurs sont au moins à mentionner. Dans *la Consistance de l'axiome du choix et de l'hypothèse généralisée du continu avec les axiomes de la théorie des ensembles* (1940, éd. revue 1951), Gödel démontra que si le système Zermelo-Fraenkel est consistant sans l'axiome du choix, il le reste si on lui ajoute cet axiome : autrement dit, on ne peut réfuter l'axiome du choix. De même, l'hypothèse du continu (il n'y a pas de nombre cardinal entre $\aleph_0$ et $2^{\aleph_0}$) est consistante avec le système Zermelo-Fraenkel (sans l'axiome du choix). En 1963, un mathématicien de Stanford, Paul J. Cohen, établit que ces deux axiomes (choix et hypothèse du continu) sont indépendants du système Zermelo-Fraenkel : on ne peut pas les démontrer sur la base de ce

Les mathématiques ne sont pas fondées de façon parfaitement logique.
Mais la logique, selon le mot de Hermann Weyl, demeure pour le mathématicien une hygiène nécessaire.

système. De plus, si l'on conservait l'axiome du choix dans le système Zermelo-Fraenkel, on ne pourrait démontrer dans ce système l'hypothèse du continu. Tout cela indique que nous sommes libres de construire de nouveaux systèmes des mathématiques sans leur incorporer l'un de ces deux axiomes fort discutés, ou même les deux.

Aujourd'hui : des mathématiques sans illusion.

L'état présent des mathématiques peut susciter des regrets. Leur prétention de vérité a dû être abandonnée. Les efforts pour éliminer les paradoxes et établir la consistance des structures ont jusqu'ici échoué. Plus personne n'est d'accord sur les axiomes qu'on peut utiliser. Sans compter la variété des algèbres et des géométries, il faut maintenant accepter le fait qu'on a la liberté de recourir à l'axiome du choix et à l'hypothèse du continu ou de les rejeter. De ces divers choix possibles peuvent naître des mathématiques tout aussi diverses. Même sur les méthodes de raisonnement il y a maintenant des désaccords. Le principe du tiers exclu a cessé d'être tenu pour un principe de logique inattaquable ; les démonstrations d'existence qui ne permettent pas le calcul des quantités dont l'existence est établie, que ce soit avec ou sans l'aide du principe du tiers exclu, sont un sujet de dispute. Il faut abandonner la prétention de raisonner de façon impeccable. Finalement, le concept de mathématiques qui prévaut, à savoir une collection de structures, chacune fondée sur son propre lot d'axiomes, est incapable d'englober tout ce que les mathématiques devraient englober.

Devant ces variétés d'axiomes et de principes de raisonnement, quel *modus vivendi* retenir ? Quels choix faire ? Autrement dit, dans quelle direction les mathématiques devraient-elles aller ? L'histoire fournira la réponse. Depuis qu'on a reconnu, il y a plus d'un siècle, la diversité des algèbres et des géométries, chacun a dû se décider. Les mathématiciens perspicaces ont su quoi choisir. Il faut continuer de faire des mathématiques, soit pour leur valeur scientifique, évidente ou en puissance, soit pour la beauté des démonstrations et des résultats.

Faut-il en conclure qu'en tant que corps de savoir établi avec justesse, les mathématiques ne sont qu'illusion ? Faut-il abandonner le raisonnement déductif et se tourner vers les arguments dotés d'une justesse intuitive, vers l'évidence empirique, vers les arguments inductifs ? Après tout, on agit ainsi en physique et, même quand on y utilise des mathématiques déductives, on y est moins exigeant que les mathématiciens en ce qui concerne la rigueur. Mais cela ne semble pas être le bon chemin. Qui a quelque connaissance des acquis mathématiques se refusera à abandonner l'idéal et les objectifs de cette discipline. Ce dont nous avons besoin, c'est d'apprécier autrement la nature des démonstrations.

D'abord, la preuve déductive a une valeur immense. Par-delà ses obscurs fondements, elle rend possible une organisation du savoir, efficace et digne de confiance. En outre, elle nous donne une relative assurance : elle nous convainc de la validité d'un théorème quand des énoncés raisonnablement sensés et intuitivement plus acceptables, portant sur les nombres ou sur des figures géométriques, sont valides. La démonstration établit des énoncés plus douteux en se fondant sur des énoncés qui le sont moins et elle réduit d'autant le nombre des énoncés à accepter par intuition ou sur le mode heuristique. A mesure qu'on localise les difficultés dans un secteur limité des mathématiques, on augmente la sécurité d'emploi du corps central.

Toutefois il nous faut bien renoncer à exiger une démonstration absolue ou totalement rigoureuse. Si nous mettons en question les énoncés acceptés de façon intuitive, nous ne pouvons les démontrer qu'en usant d'autres énoncés eux aussi intuitifs. Même ces dernières intuitions, nous ne pouvons par démonstration les faire remonter trop haut, sous peine de faire naître des paradoxes ou d'autres difficultés sans solution, notamment en logique. Vers 1900, un célèbre mathématicien français, Jacques Hadamard a dit : « La logique sanctionne les conquêtes de l'intuition. » Ce jugement n'est plus admissible. Mieux vaut dire avec Hermann Weyl : « La logique est l'hygiène qu'un mathématicien pratique pour garder santé et vigueur à ses idées. »

Il nous faut reconnaître que la rigueur n'est pas une réalité, mais un but dont on peut s'approcher, probablement sans jamais l'atteindre. Il nous faut constamment nous efforcer d'affermir ce que nous avons, mais sans espérer atteindre la perfection. La morale de l'histoire, c'est que, tout en cherchant à atteindre ce but inatteignable, nous pouvons continuer à produire ces œuvres merveilleuses et utiles qui ont fait la gloire passée des mathématiques. Tout en ayant perdu nos illusions, nous pouvons continuer à faire des mathématiques ; comme le dit l'Américain E.H. Moore, « pour aujourd'hui, la rigueur déjà obtenue est suffisante ».

Certains, pourtant, espèrent trouver une autre solution. Le groupe de mathématiciens français qui a adopté le pseudonyme collectif de Nicolas Bourbaki a avancé ce constat encourageant : « Il y a maintenant vingt-cinq siècles que les mathématiciens pratiquent la correction de leurs erreurs, ce qui, comme il est visible, a enrichi et non appauvri leur science ; cela les autorise à envisager sereinement l'avenir. » Que cet optimisme soit justifié ou pas, on peut souscrire à la remarque de Weyl : « La question des fondements derniers et de la signification dernière des mathématiques reste ouverte ; nous ne savons pas dans quelle direction se trouve la solution finale, ni même si nous pouvons espérer trouver une réponse objective finale. Peut-être le « travail mathématique » est-il une activité créatrice de l'homme, comme le langage ou la musique, essentiellement originale et dont les décisions historiques défient une complète rationalisation objective. » ■

Pour en savoir plus :

■ E.W. Beth, *les Fondements logiques des mathématiques*, Gauthier-Villars, 1955 (et la seconde édition, considérablement augmentée : *The Foundations of Mathematics*, North Holland, 1959) ; *la Crise de la raison et la logique*, Gauthier-Villars, 1957.

■ A. Heyting, *Intuitionism*, North Holland, 1956.

■ S. Körner, *The Philosophy of Mathematics*, Hutchinson, 1960.

■ Ernest Nagel et James R. Newman, *Gödel's Proof*, New York University Press, 1958.

■ Hermann Weyl, *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, Princeton University Press, 1949.

■ J. van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel, A source book in mathematical logic*, Harvard University Press, 1967.

■ A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel, A. Levy, *Foundations of Set Theory*, (2e éd., revue), North Holland, 1973.

■ J. Largeault (ed.), *Logique mathématique, textes*, Colin, 1972. Un recueil de textes fondamentaux.

■ A propos du livre de Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (1973), voir l'article de Pierre Thuillier, « Les mathématiques : fin en soi ou instrument ? », dans *la Recherche* de septembre 1973, nº 37, p. 805.