CHRONIQUE: *L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES*

Louis Charbonneau
Départ. Math. et Inf., UQAM

PREMIÈRE PARTIE: FONCTION: DU STATISME GREC AU DYNAMISME DU DÉBUT DU XVIIIe SIÈCLE

La fonction

Dans certains manuels du secondaire, la fonction se définit comme un ensemble de couples (x, y) où x et y sont des éléments de deux ensembles donnés et où «aucune paire de couples n'a la même composante».[1] En pratique, la valeur de la première composante détermine, selon une règle précise, la valeur de la deuxième composante d'un couple de la fonction. Les exemples qu'on propose aux étudiants pour illustrer ce «nouveau» concept sont de deux ordres; certains, sur des ensembles finis, sont d'une déconcertante artificialité, d'autres, pour la plupart, sur $\mathbb{R}$, prennent une forme plus familière comme $(x, f(x))$ où $f(x) = \pm ax^2 \pm bx \pm c$, ou encore $f(\Theta) = \cos(\Theta)$. L'étudiant, aussi bien que l'enseignant d'ailleurs, me semble justifié de questionner la pertinence d'introduire un nouveau concept alors que jusque-là, on se débrouillait bien sans lui et que rien de nouveau ne semble justifier cette introduction tout à coup.

La notion de fonction ne prend cette forme qu'à la fin du XIXe siècle. C'est donc dire que cette définition de fonction résulte d'une longue évolution bien différente, on s'en doutera, de l'expérience d'un élève du secondaire ou du collégial. Comment en est-on venu à cette forme ensembliste de fonction, statique et dont tout dynamisme a disparu. Une telle fonction comporte en fait trois composantes:

- l'ensemble domaine de définition (celui des x),
- l'ensemble image (celui des y),
- la règle de correspondance permettant de déterminer y lorsqu'on connaît x.

Nous nous intéresserons ici à la forme que prend à diverses époques cette règle de correspondance. Plus précisément, nous verrons que pour être considérée *mathématique*, une règle de correspondance doit, à une époque donnée, satisfaire certains critères propres à celle-ci. Aussi est-il important de distinguer le lien fonctionnel qui peut être décrit dans un langage de tous les jours et la façon de traduire ce lien de façon à pouvoir le traiter mathématiquement.

En Grèce

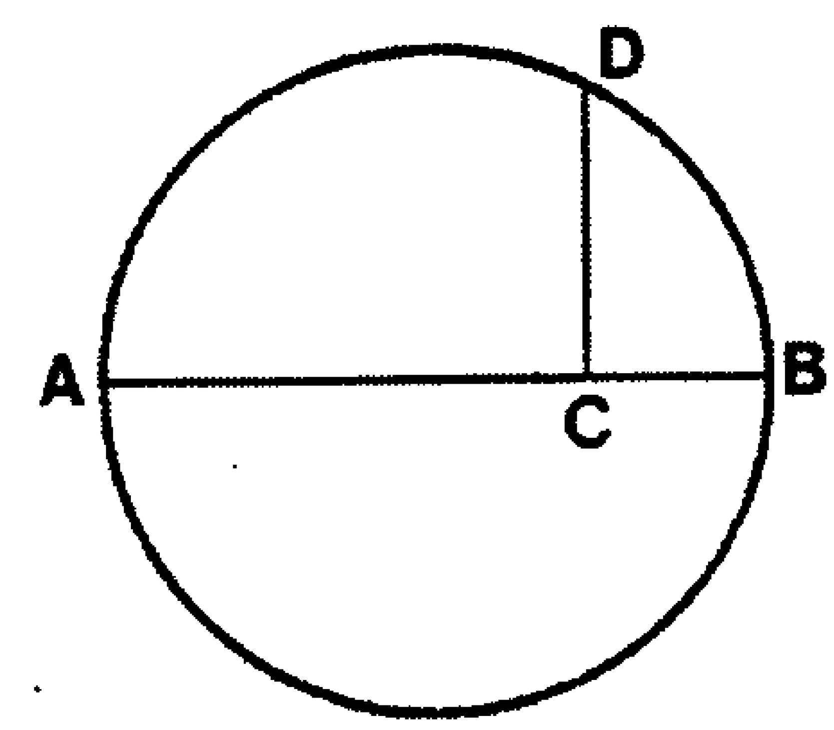
Le cercle et les courbes mécaniques (Vers 400 av. J.-C.)

Les principaux liens fonctionnels, traités mathématiquement chez les Grecs, sont les lieux géométriques. Par exemple, le cercle est un tel lieu. Sa description mathématique peut être comprise immédiatement par n'importe qui:

Un cercle est le lieu des points équidistants d'un point appelé centre du cercle.

Cette description du cercle doit par ailleurs être modifiée afin de permettre une manipulation mathématique plus riche. La propriété mathématique le plus souvent utilisée caractérisant le cercle était plutôt la suivante:[2]

Étant donné un segment de droite AB, élevant une perpendiculaire CD à cette droite, le lieu des points D tel que CD soit la moyenne proportionnelle entre AC et CB est un cercle.



Autrement dit, on a que $\overline{AC}$ est à $\overline{CD}$ come $\overline{CD}$ est à CB ($\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CB}}$).

Remarquons que cette relation, que nous aurions tendance aujourd'hui à exprimer sous la forme $(\overline{CD})^2 = \overline{AC} \times \overline{CB}$, prend chez les Grecs l'allule d'une égalité entre deux rapports plutôt que d'une égalité entre deux nombres. De plus, dans une telle proportion, on ne focalise sur aucun des segments en particulier. Les différents éléments, entrant dans la relation mathématique caractéristique du cercle, sont tous plus ou moins sur un pied d'égalité.

Notons enfin que la proportion qui caractérise le cercle impose une vision purement statique, point par point, du cercle. L'idée que ce lieu puisse être tracé par le mouvement d'une pointe traçante d'un compas a été complètement évacuée. Nous retrouvons ici quelques caractéristiques de la définition de fonction donnée au tout début de cette chronique.

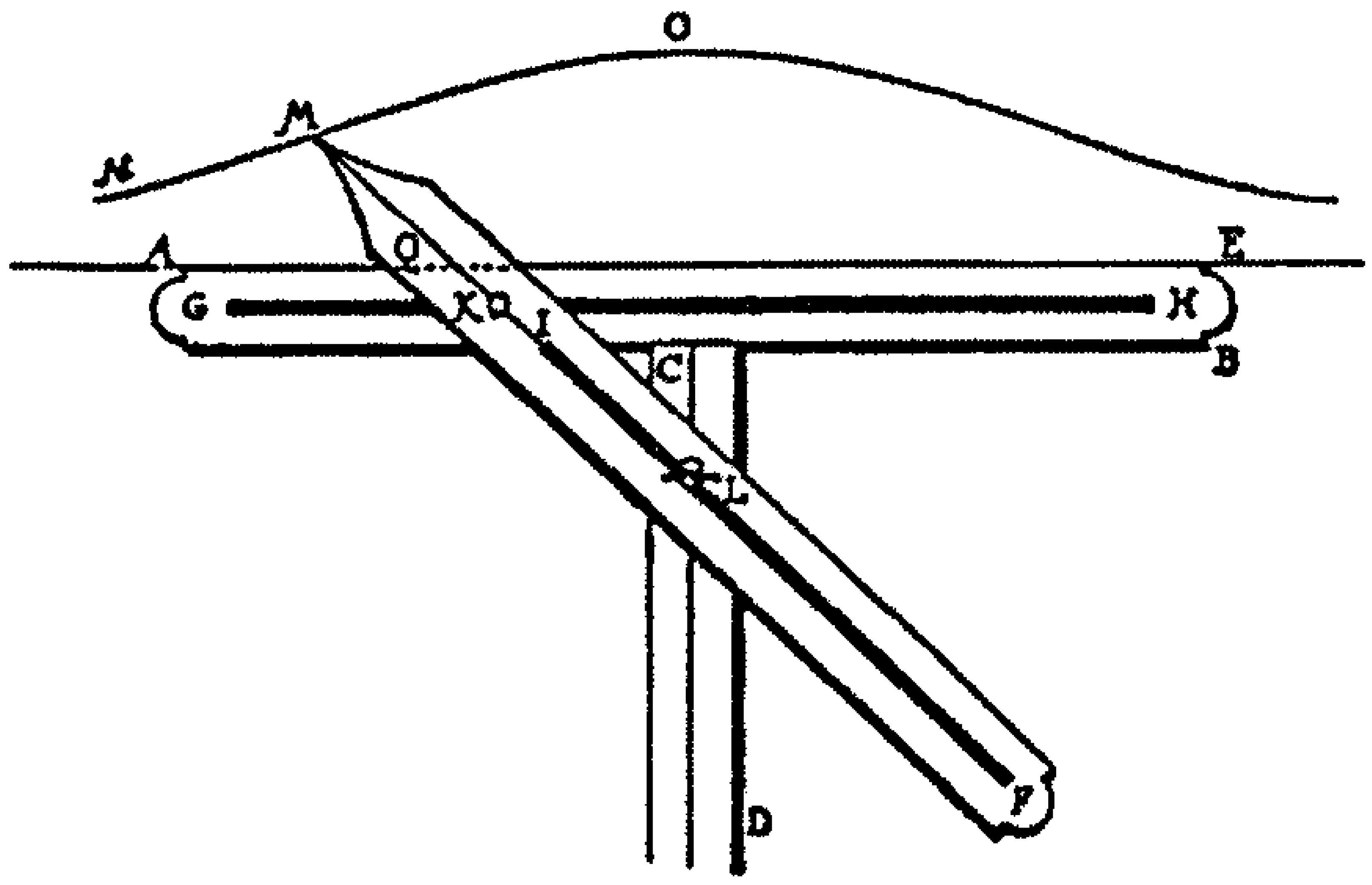
Il y a donc dichotomie entre l'expression mathématique et la description de la génération du lieu, génération dynamique du lieu. D'ailleurs, les Grecs divisaient les lieux en trois catégories:[3] les lieux *plans* (les lieux que l'on peut tracer à l'aide de la règle et du compas), les lieux *solides* (les coniques), et les lieux *linéaires* (tous les autres). Ces derniers portaient aussi le nom de lieux mécaniques, car, pour les tracer, il fallait employer une «machine», chaque lieu étant

1 Par exemple dans *Horizons mathématiques*, secondaire 3, Montréal (Beauchemin), 1978, p. 339.

2 Van des Waerden, B.L., *Sciences Awakening*, New York (Oxford Un. Press), 1961. Voir entres autres le chapitre VII.

3 Kline, Morris, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, New York (Oxford Un. Press), 1972, p. 311.

dessiné par une machine qui lui était propre. Ainsi la conchoïde peut-elle tracée par la machine qui suit:[4]



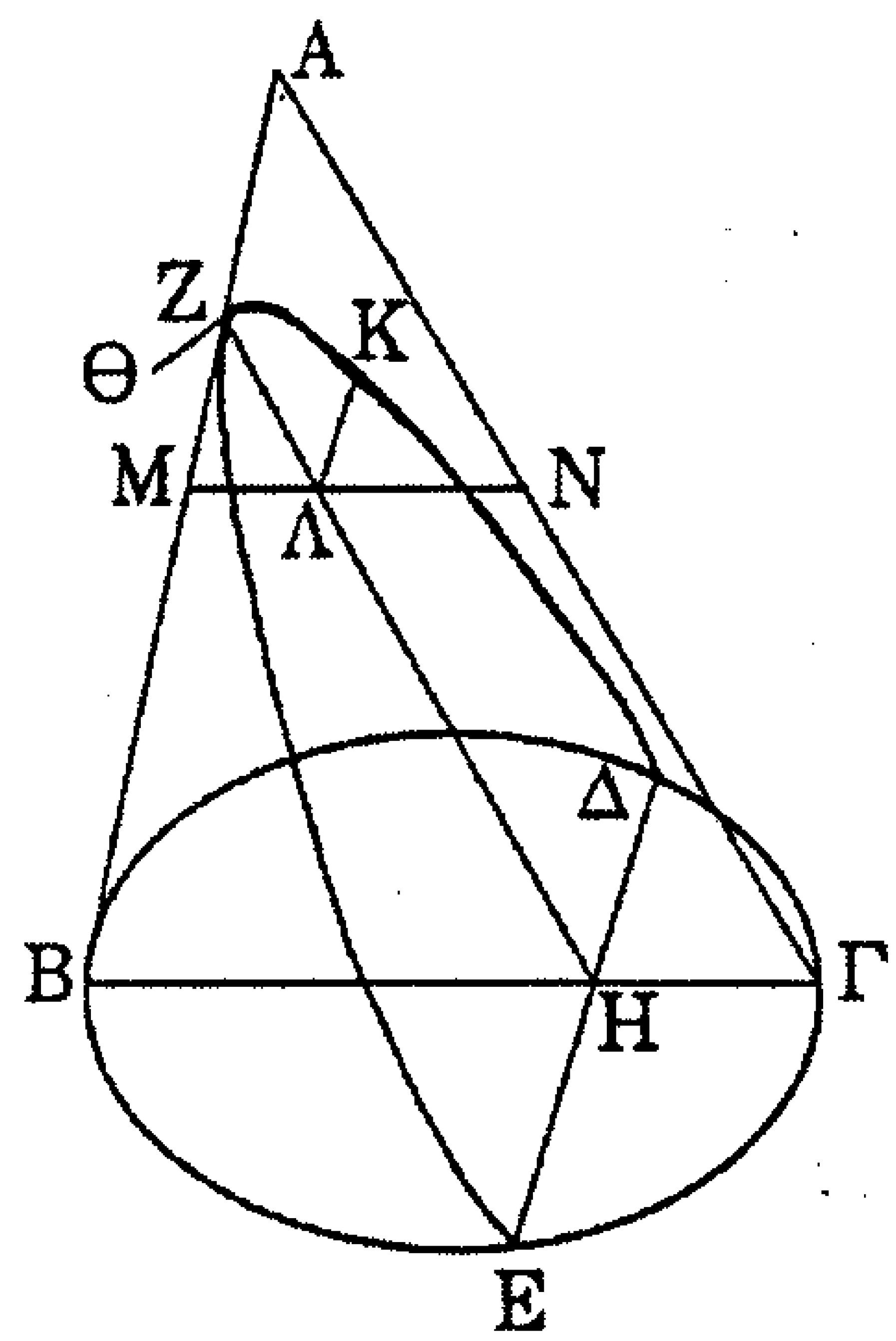
Apollinius (261 av. J.-C. - 190 av. J.-C.) et les coniques

Apollonius et son contemporain Archimède furent les géomètres grecs qui contribuèrent le plus à la connaissance des coniques. Le livre du premier, *Les coniques*, contient les principaux résultats relatifs à ces courbes. Il contient des exemples de la manipulation géométrique, et donc mathématique, de relations caractérisant des lieux géométriques donnés. Nous nous limiterons ici à la parabole. Voici le texte de la proposition XI du Livre I:[5]

> Si un cône est coupé par un plan passant par l'axe, et s'il est coupé par un autre plan coupant la base du cône suivant une droite perpendiculaire à la base du triangle passant par l'axe: si, de plus, le diamètre de la section est parallèle à l'un des côtés du triangle passant par l'axe, le carré de toute droite menée de la section du cône, parallèlement à la section commune du plan sécant et de la base du cône, jusqu'au diamètre de la section, équivaut au rectangle délimité par la droite qu'elle découpe sur le diamètre, du côté du sommet de la section, et par une certaine droite dont le rapport à la droite située entre l'angle du cône et le sommet de la section est le même que celui du carré de la base du triangle passant par l'axe au rectangle délimité par les deux côtés restant du triangle. Nous appellerons une telle section une *parabole*.

Il poursuit en explicitant sur une figure le sens (difficile à saisir si l'on ne sait pas déjà de quoi il parle) de la proposition:

> Soit un cône dont le sommet est le point A, et dont la base est le cercle ΒΓ. Coupons-le par un plan passant par l'axe, lequel détermine comme section le triangle ΑΒΓ. Coupons-le aussi par un autre plan coupant la base du cône suivant une droite ΔΕ, perpendiculaire à la droite ΒΓ, lequel détermine la ligne ΔΖΕ comme section dans la surface du cône, tandis que le diamètre ΖΗ de la section est parallèle à l'un des côtés ΑΓ du triangle passant par l'axe. Menons, du point Ζ, la droite ΖΘ perpendiculaire à la droite ΖΗ, et faisons en sorte qu'une droite ΖΘ soit à la droite ΖΑ comme le carré de la droite ΒΓ est au rectangle délimité sous les droites ΒΑ, ΑΓ [c'est-à-dire l'aire du rectangle dont les côtés sont ΒΑ et ΑΓ]. Enfin, prenons un point quelconque Κ sur la section, et menons, par ce point Κ, la droite ΚΛ parallèle à la droite ΔΕ. Je dis que le carré de la droite ΚΛ équivaut au rectangle délimité sous les droites ΘΖ, ΖΛ.



Apollinius caractérise la parabole par une expression qui n'est plus une proportion mais plutôt par une comparaison de deux aires, un carré ($ΚΛ^2$) et un rectangle dont le premier côté (ΖΛ) se retrouve sur la figure et le second (ΘΖ) est «calculé» par une proportion qui ne dépend que de la forme du cône et de la situation du plan de coupe.

On retrouve encore ici la vision statique, point par point, de la règle de correspondance entre différents segments, ici ΚΛ et ΖΛ. Néanmoins, la forme de cette relation met davantage en évidence les segments dont la longueur dépend de la position d'un point sur ce lieu (ΚΛ et ΖΛ) et ceux dont la longueur est indépendant de la position de ce point (ΖΘ, ΒΑ, ΑΓ, ΒΓ, ΖΑ).

Conclusion, Grèce

Nous avons vu deux exemples dans lesquels l'on retrouve une relation entre des points, relation qui s'exprime dans un

[4] Dessin datant de la Renaissance, tiré de Smith, David Eugene, *History of Mathematics*, tome II, p. 299.

[5] *Les coniques d'Apollinius de Perge*, traduction de Paul Ver Eecke, Paris (Blanchard), 1963, pp. 21-22.

langage mathématique précis. Il s'agit bien d'une règle de correspondance. Peut-on pour autant conclure que les Grecs possédaient la notion de fonction? NON, Car, bien sûr, chaque lieu se caractérise par une expression mathématique. Mais chacun de ces lieux fut étudié individuellement. De plus, l'absence d'un langage concis pour représenter le lien fonctionnel rend impossible, ou à tout le moins très difficile, une extension des méthodes de recherche d'une situation à une autre. L'expression d'un lien fonctionnel demeure trop enracinée dans le problème dont il est issu pour donner lieu à une réflexion sur la nature du lien fonctionnel en général.

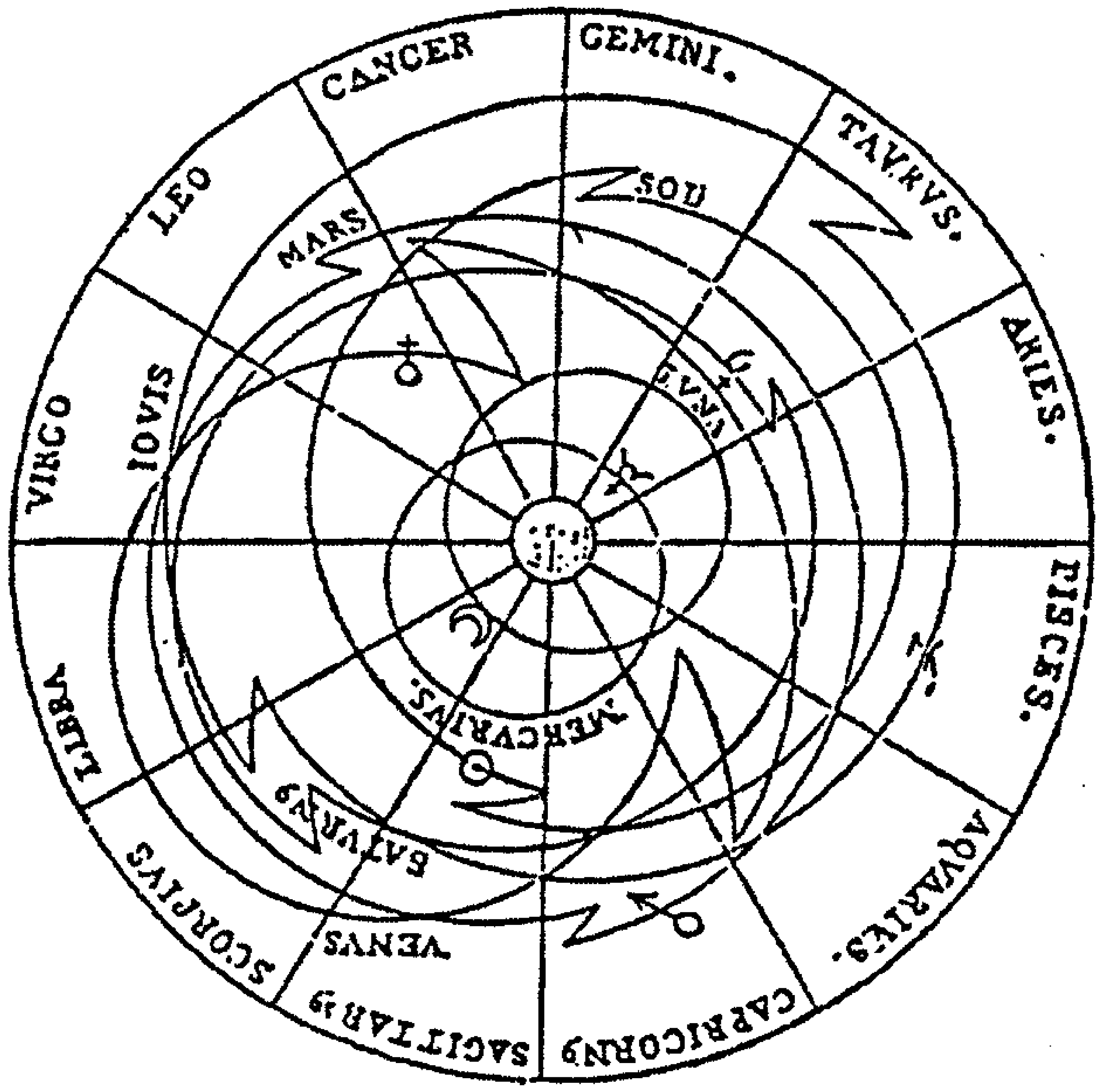
Ajoutons aussi la lourdeur du langage qu'exige la manipulation de ces liens fonctionnels. L'exemple de la parabole d'Apollinius l'illustre assez bien et la lecture des propriétés caractéristiques de l'ellipse et de l'hyperbole est encore plus ardue. Dans un tel contexte, l'extraction d'une idée générale de lien fonctionnel s'embourbe dans les particularismes que le langage mathématique ne laisse pas, à ce stade de son développement, aisément entrevoir. D'ailleurs, existe-t-il un besoin d'aller au-delà de ces particularismes?

La dynamique:
la règle de correspondance
sans le symbolisme algébrique

Depuis Pythagore et la découverte des longueurs incommensurables, depuis Zénon d'Élée et ses paradoxes, les Grecs considéraient avec beaucoup de méfiance les raisonnements impliquant l'infini, et en particulier les raisonnements sur le mouvement. Or, à cause des travaux des scientifiques arabes, et surtout de l'effet inhibiteur du temps, les Européens du Moyen Âge et de la Renaissance surmontent cette peur. Le changement, et en particulier le mouvement, les intrigue. Or le mouvement implique une référence de base incontournable, le temps. Par ailleurs, étudier le mouvement implique de déterminer une relation entre la position et le temps. Chez les Grecs, les relations cherchées se trouvaient imbriquées dans une figure et étaient sujettes au langage que suggérait, pour ne pas dire qu'imposait, l'usage de la géométrie. Le statisme de cette approche ne se prêtait guère à l'étude du mouvement.

Au Moyen Âge, la recherche d'une relation entre le temps et un mobile oblige à aller au-delà d'une approche statique des mathématiques. Les phénomènes abordés, à défaut de calcul différentiel, devaient être étudiés globalement. Le lien fonctionnel que l'on cherche nous est inconnu. Pour la première fois, le problème posé implique la recherche d'une fonction.

Le Moyen Âge chrétien avait des représentations graphiques de phénomènes dynamiques comme celui-ci qui représente la position des planètes dans le Zodiaque au cours des année:[6]



En soi, comme le dessin d'un lieu géométrique, un tel graphique informe sur la relation entre la position d'une planète et le temps. Toutefois, ces représentations ne constituent de fait que des tableaux présentés sous une forme concise et géométrique, au prix d'une certaine imprécision. Elles permettent de retrouver une information numérique approximative, mais guère plus.

N'ayant pas de langage quantitativement précis pour parler du mouvement, on était réduit dans un premier temps 1) à voir globalement le phénomène dans lequel un changement jouait un rôle central, 2) à comparer les effets d'un changement plus complexe à celui d'un changement plus simple. Les trois exemples suivants éclaireront ce que je veux dire.

Merton College et Galilée

Au XIII[e] siècle, les doctes du Merton College, d'Oxford en Angleterre, de même que ceux de Paris, développèrent, dans le but de pouvoir comprendre la nature de ce qui change, la théorie de la latitude des formes. Une forme est

6 Clagett, M., *Nicole Oresme and the Medieval Geometry of Qualities and motions*, Madison (The Univ. of Wisconsin), 1968, p. 200.

simplement une qualité qui, tout en n'étant pas immédiatement quantifiable, peut avoir des intensités variables. La lumière, par le fait qu'elle puisse être plus ou moins intense, est une forme. Il en va de même de la vitesse (à l'époque non encore quantifiée). La latitude fait référence à l'intensité.

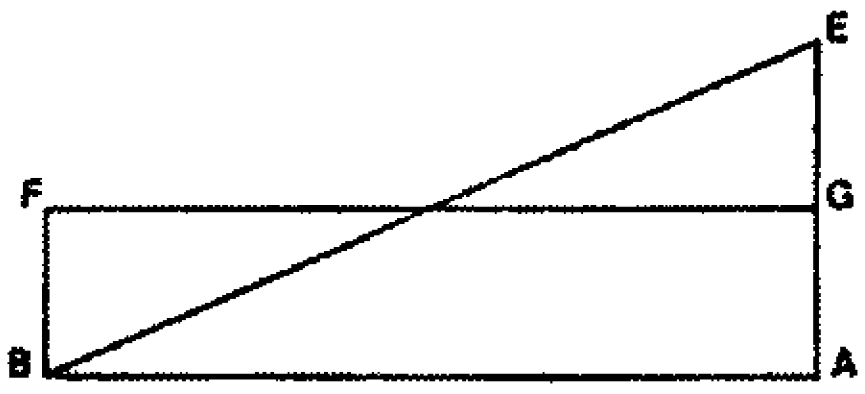
Les scholastiques du Merton College ont énoncé la règle suivante:[7]

Every quality, if it is uniformely difform, is of the same quantity as would be the quality of the same or equal subject that is uniform according to the degree of the middle point of the same subject.

Une qualité uniformément difforme est une qualité qui change (d'où le mot difforme) proportionnellement (d'où le mot uniformément) au temps. Ce que dit l'énoncé du Merton College: La résultante d'un changement d'une qualité uniformément difforme est la même que la résultante d'une qualité constante dont la latitude (l'intensité) est égale à la latitude de la première qualité à la mi-temps.

Obscur?

En représentant la latitude d'une forme par un segment de droite, Oresme (1323-1382) illustre une forme uniformément difforme par le triangle EBA et une forme uniforme par un rectangle comme le rectangle FBAG:

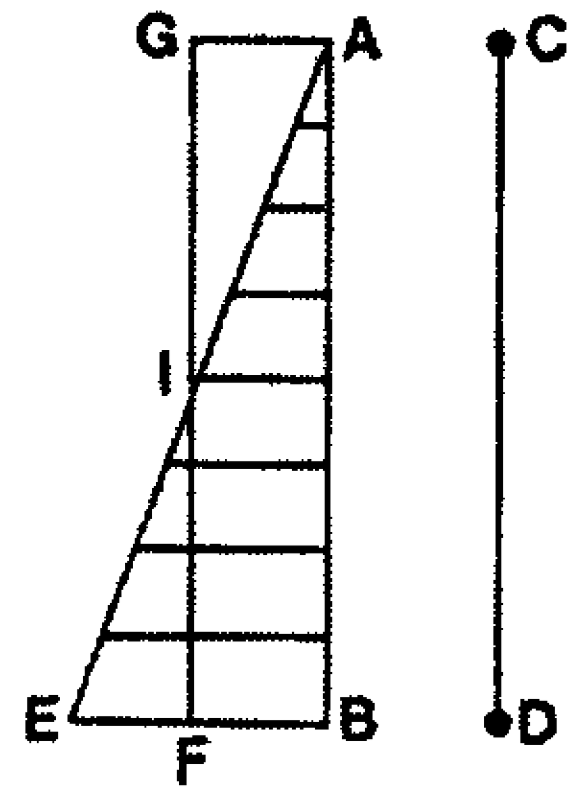


Dans une telle représentation, l'énoncé du Merton College signifie que l'aire du triangle EBA (la représentation de la forme uniformément difforme) égale l'aire du rectangle FBAG (la représentation de la forme uniforme de latitude égale à la latitude au milieu du temps).

Si la forme est la vitesse d'un corps, nous obtenons le résultat, qui nous semble aujourd'hui presqu'évident.[8]

Le temps pendant lequel un espace quelconque est franchi par un mobile, partant du repos, avec un mouvement uniformément accéléré, est égal au temps pendant lequel le même espace serait franchi par le même mobile avec un mouvement uniforme, dont le degré de vitesse serait la moitié du plus grand et dernier degré de vitesse atteint au cours du mouvement uniformément accéléré.

Oresme a énoncé une proposition à peu près équivalente. Toutefois, j'ai tiré l'énoncé ci-haut du *Discours concernant deux nouvelles sciences* (1638), écrit par Galilée (1564-1642) vers la fin de sa vie alors qu'il était en résidence surveillée. Ce Théorème I – Proposition I est démontré à l'aide de la figure suivante semblable à celle d'Oresme: où $\overline{CD}$ représente l'espace parcouru, $\overline{AB}$ représente le temps total et les segments horizontaux, les divers degrés des vitesses à divers moments.



L'énoncé qui suit dans les *Discours* illustre bien la nécessité dans lequel se trouve le physicien de rester à l'intérieur du phénomène qu'il étudie, à défaut d'un langage algébrique (qui existait à l'époque mais que Galilée n'employa pas):[9]

Théorème II – Proposition II
Si un mobile, partant du repos, tombe avec un mouvement uniformément accéléré, les espaces parcourus en des temps quelconques par ce même mobile sont entre eux en raison double des temps, c'est-à-dire comme les carrés de ces mêmes temps.

C'est par une comparaison similaire de mouvements que Neper (1550-1617) définit ses logarithmes en 1614 dans son *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*.[10]

On constate que, dans ce cadre, le langage des proportions est encore essentiel à l'expression du lien fonctionnel; ce qui rend la manipulation de la représentation mathématique du lien fonctionnel assez lourde et dépendante du problème traité. Néanmoins, un certain dynamisme s'est immiscé dans l'interprétation de ces expressions mathématiques.

La géométrie de Descartes (1637)

Le nom de Descartes (1596-1650) est associé, dans l'enseignement secondaire, aux coordonnées cartésiennes et donc à la géométrie analytique. En fait, Descartes n'a pas introduit le double système d'axes réels que nous employons

---

7 Clagett, M., opus cit., p. 408. Une analyse intéressante de la notion de fonction chez Oresme a été faite par Sophie René de Coteret, *Étude historique de la notion de fonction: analyse épistémologique et expérimentation didactique*, mémoire de maîtrise, UQAM, 1985, pp. 51 à 79.

8 Galilée, *Discours concernant deux nouvelles sciences*, 1638, traduction par M. Clavelin, Paris (Vrin), 1970, tome I, p. 140.

9 *Idem*, p. 141.

10 Kline, M., opus cit., pp. 256 à 258.

aujourd'hui. Ce système nous vient plutôt du mathématicien anglais Wallis (1616-1703), mais ne fut popularisé qu'au XIXe siècle.[11] Le terme «géométrie analytique» n'a été d'ailleurs employé officiellement qu'en 1804 par le mathématicien-physicien Biot.[12]

Mais revenons à Descartes. Sa principale contribution à l'expression des lois de correspondance fut sans contredit la traduction en termes algébriques des liens fonctionnels caractérisant un lieu géométrique, essentiellement comme nous le faisons aujourd'hui. En fait, Descartes innove doublement. D'une part, il exprime les relations caractérisant les lieux géométriques en déterminant «le rapport qu'ont tous leurs (les courbes) points à ceux des lignes droites».[13] Autrement dit, formuler le ou les rapports entre les points d'une courbe en termes de rapports entre des points de droites (les axes), ce que personne n'avait fait aussi systématiquement auparavant. D'autre part, Descartes délaisse la tradition géométrique issue des Grecs, où tout s'exprimait en termes de rapports, pour employer le langage algébrique (phénomène nouveau) développé par ses prédécesseurs, Viète pour les règles de manipulation et beaucoup d'autres pour le symbolisme.[14] Ainsi, écrit-il l'équation d'une courbe définie par l'intersection d'une règle tournant autour d'un point et d'un certain triangle glissant le long d'une verticale, par

$$yy \propto cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac.$$

Ainsi, les expressions mathématiques découlent-elles d'une méthode unique de travail et prennent-elles une forme similaire. Les invariances d'écritures peuvent être ainsi plus facilement décelées. C'est là une condition nécessaire au développement d'un concept de fonction qui transcende les exemples particuliers.

Au-delà de cette algébrisation des problèmes géométriques, Descartes délaisse la vision statique des Grecs pour une vision plus dynamique du lien fonctionnel. Il dit par exemple:

> *Mesme prenant successivement infinies diverses grandeurs pour la ligne y, on en trouvera aussi infinies pour la ligne x, & ainsi on aura une infinité de divers poins, tels que celuy qui est marqué C, par le moyen desquels on descrira la ligne courbe demandée.* (p. 45)

Par ailleurs il rejette les catégories grecques des courbes, en notant qu'en fait la règle et le compas, «on peut aussy (les) nommer des machines»[15], et que les courbes linéaires mériteraient d'être classifiées plus finement. Aussi propose-t-il deux catégories de courbes:

Courbes géométriques:[16]

> [...] *celles qu'on peut nommer geometriques, c'est à dire qui tombent sous quelque mesure precise & exacte, ont necessairement quelque rapport a tous les poins d'une ligne droite, qui peut estre exprimé par quelque equation, en tous par une mesme.*

Ces courbes se divisent en genres. Les courbes du premier genre lorsque «cette équation ne monte que jusques au rectangle de deux quantités indéterminées [~~ce qui signifie de degré 2~~], ou bien au quarré d'une mesme [de degré 2]». Les courbes du deuxième genre sont celles de degré 3 ou 4. Etc. Cette division provient de ce que Descartes croyait «qu'il y a reigle generale pour reduire au cube toutes les difficultés qui vont au quarré de quarré» (p. 323 ou 57) et de même les équations de degré 2n + 1 se ramène à une équation de degré 2n, ... ce qui est faux. Leibniz donna en 1684 le nom de courbes algébriques aux courbes géométriques.[17] La classification des fonctions algébriques simplement par leur degré vient de Newton qui, en 1676, caractérisa une courbe algébrique par le fait qu'elle coupe une certaine droite au plus un nombre fini de fois (égale au degré de l'expression algébrique qui la représente).[18]

Courbes mécaniques:

Ce sont toutes les courbes dont l'équation n'est pas algébrique mais qui «peuvent aussy estre descrites par un mouvement regulier & continu». Descartes remarque qu'«on ne la doit pas entierement rejetter de la Geometrie» (p. 340 ou 90). Leibniz appela par la suite ces courbes des courbes transcendantes, nom qui leur est resté.

La remarque de Descartes montre que les courbes mécaniques n'ont pas les mêmes droits que les courbes géométriques. En fait, Descartes ne fait que délaisser les courbes dont le traitement mathématique laisse à désirer. Nous verrons qu'à plusieurs égards, ce sera le cas pour les deux siècles à venir. L'évolution de la notion de fonction ne sera que le reflet de ce que peuvent manipuler les mathématiciens.

Le XVIIe siècle, le calcul infinitésimal

Le calcul infinitésimal

Le calcul différentiel et intégral fut mis en forme à la fin du XVIIe siècle indépendamment par Newton (1643-1727),

---

11 Boyer, Carl B., *History of Analytic Geometry*, New York, Amsterdam, 1956, p. 111 et pp. 200 et suiv.

12 *Idem*, p. 220.

13 *The Geometry of René Descartes*, 1637, traduction anglaise par David Eugene Smith et Marcia L. Latham, (1re éd. 1925), édition Dover 1954. Cette édition contient une fac-similé du texte original français. Citation: p. 319 (éd. originale), p. 49 (ed. Dover).

14 En fait, il rend encore plus efficace cette approche algébrique en laissant tomber l'homogénéité des équations qui jusqu'alors, par analogie avec la géométrie, requérait que chaque monôme d'une équation soit de même degré. On n'aurait pas écrit $x^2 + d = cx$ mais plutôt $x^2 + b^2 = cx$.

15 Descartes, opus cit., p. 315 (p. 41).

16 Descartes, opus cit., p. 319 (p. 49).

17 Kline, M., opus cit., p. 312.

18 Boyer, C.M., opus cit., p. 139.

en Angleterre, et par Leibniz (1642-1716), en Europe continentale. Or, par la nature des problèmes qui l'ont fait naître, ce calcul repose sur une vision dynamique de la fonction, vision qui déjà faisait son chemin à l'époque de Descartes. Les deux composantes principales de ce calcul, c'est-à-dire la dérivée de l'intégrale, sont de fait des opérateurs linéaires sur des fonctions. Les problèmes où ces opérateurs interviennent sont donc des problèmes où ce qui est cherché n'est plus un nombre comme en algèbre, mais une fonction. Dès lors, de même que l'étude de la résolution des équations amena nécessairement à préciser le sens et les extensions possibles des nombres naturels, de même il ne faut pas se surprendre de voir la notion de fonction se préciser par l'étude de la résolution des équations différentielles et des dérivées partielles. Comme le dit Hadamard: «L'être mathématique, en un mot, ne fut plus le nombre: ce fut la loi de variation, la fonction. La mathématique n'était pas seulement enrichie de nouvelles méthodes, elle était transformée dans son objet»[19]

Le mot *fonction*

Le terme *fonction* apparaît pour la première fois en mathématique dans un texte inédit de Leibniz de 1673:[20]

> *J'appelle fonction toutes les portions des lignes droites qu'on fait en menant des droites indéfinies qui répondent au point fixe et aux points de la courbe; comme sont abscisse, ordonnée, corde, tangente, perpendiculaire, sous-tangente, sous-perpendiculaire... et une infinité d'autres d'une construction plus composée qu'on ne peut figurer.*

Cette acceptation de fonction fait référence à la fonction que jouent diverses droites par rapport à un point d'une courbe.

En 1718, le terme fonction a été pour la première fois employé dans une acceptation qui s'approche de la nôtre par Jean Bernoulli (1664-1748), dans un article traitant d'un problème de calcul des variations:[21]

> *On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette valeur variable et de constantes.*

On notera qu'il s'agit d'une définition restreignant, de façon sous-entendue, les fonctions aux expressions algébriques, ne précisant pas si elles doivent comporter qu'un nombre fini de termes. Ajoutons que Bernoulli propose alors le symbole φx pour dénoter une fonction et φx pour sa valeur en x. La notation usuelle fut introduite et popularisée par Euler (1707-1783) en 1734 (pub. 1740).[22]

Les développements en séries infinies

La définition de Jean Bernoulli confirme le déplacement déjà amorcé chez Descartes vers une limitation des mathématiques aux liens fonctionnels dont la règle de correspondance s'exprime nécessaire par une expression algébrique, au détriment, jusqu'à un certain point, des autres (les fonctions exponentielles et les fonctions trigonométriques, par exemple). Mais, depuis Descartes, les fonctions transcendantes ont été réintégrées, même si leur exil du monde mathématique n'avait été dans les faits que théorique. En effet, vers la fin du XVII[e] siècle, presque toutes les fonctions usuelles avaient été développées en séries infinies, autrement dit représentées par des expressions de la forme:

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i.$$

Elles se présentent donc de la sorte comme à la périphérie des fonctions algébriques.

Le développement en série infinie d'une fonction ouvrait de nouvelles possibilités. En premier lieu, les opérateurs d et $\int$ étant linéaires, le calcul «algébrique» sur ces opérateurs pouvait maintenant s'étendre à la classe des fonctions développables en série infinie. En second lieu, les développements se révèlent un outil important d'approximation pour le calcul des fonctions transcendantes ainsi que de π et de e. Enfin, le développement en série permettait de transformer une fonction implicite en une fonction explicite, à l'aide de ce qu'on appelle le parallélogramme de Newton. De la sorte, on pouvait exprimer une variable, par exemple y, d'une fonction algébrique implicite $f(x, y) = 0$ comme une série infinie des puissances de l'autre:

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{n + mi}.$$

Nous verrons, dans la prochaine chronique comment, par le biais des séries infinies, les mathématiciens en vinrent à élaborer la théorie des ensembles et à utiliser cette dernière pour formuler la définition de fonction citée au début de cette note.

---

19 Dahan-Delmedico A. et Peiffer, J., *Une histoire des mathématiques, Routes et dédales*, Paris, 1986 (Seuil, Coll. Point no S49), p. 218.

20 Opus cit., p. 219

21 Opus cit., p. 218 et Youschkevitch, A.P., The Concept of Function up to the Middle of the 19[th] Century, *Archive for the History fo Exact Sciences, 1976, vol. 16, no 1, pp. 37 à 85, voir p. 60.*

22 Youschkevitch, opus cit., p. 60.

Louis Charbonneau
Dépt Math. et Inf., UQAM

FONCTION (II): UN PERSONNAGE EN QUÊTE D'AUTEUR
Le XVIII^e siècle

Lorsque j'étais adolescent, j'avais toujours plaisir à venir à Montréal avec mes confrères étudiants pour assister aux représentations de la Nouvelle Compagnie Théâtrale qui jouait alors au théâtre du Gésu. L'une des pièces dont j'ai gardé le souvenir le plus clair est *Six personnages en quête d'auteur* de Pirandello. Cette pièce illustre ce que tout écrivain constate, l'indépendance des personnages qu'il a pourtant créés. En effet, dans tout roman, dans toute pièce de théâtre, du moment qu'un personnage est créé, sa personnalité se précise, ses actions se trouvent imbibées d'une logique propre que l'auteur ne saurait transgresser sans affaiblir, par la gratuité des comportements, toute la structure de son œuvre.

Un phénomène similaire, mais beaucoup plus serré, existe dans cette grande œuvre qu'est l'histoire des mathématiques. L'auteur, c'est l'ensemble des mathématiciens qui jalonnent l'histoire[1]. Les personnages sont ici les objets mathématiques qui, une fois créés, obéissent à une logique beaucoup plus implacable que celle des personnages de roman ou de théâtre. De fait, cette logique tellement coercitive amène l'auteur vers une précision toujours plus grande de la personnalité des personnages-objets.

Prenons un exemple bien connu, la notion de nombre et plus particulièrement l'extension de cette notion aux «nombres» complexes. Les propriétés des nombres, sublimées en algèbre sous forme de règles de manipulation des équations, permettent de résoudre sans trop de problèmes les équations du premier et du second degré. À la Renaissance, des règles pour résoudre les équations du troisième degré sont mises au point. Jérôme Cardan, tentant de résoudre, à l'aide de ces règles, une certaine équation du troisième degré, se voit obligé de calculer avec des expressions symboliques de la forme (notation moderne) $5 + \sqrt{-15}$ et $5 - \sqrt{-15}$ qui semblaient alors dénuées de sens. Et pourtant, les racines obtenues à la fin du processus sont, elles, tout à fait acceptables. Le personnage nombre vient d'obliger l'auteur-mathématicien à prendre conscience d'une face jusqu'alors cachée de sa personnalité. Reste maintenant à l'auteur d'accepter cette intrusion. Il en prendra près de quatre siècles. En fait, il faudra interpréter géométriquement les nombres complexes pour leur permettre de prendre place de plein pied comme *nombres*. Notons toutefois que cela n'a pas empêché les mathématiciens du XVIII^e siècle d'employer ces nombres régulièrement. Qu'il suffise de mentionner la formule fondamentale $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ qui date de cette époque. Ajoutons de plus que la reconnaissance, en tant que nombres, des nombres complexes et aussi des nombres négatifs, s'est manifestée par la reconnaissance de ceux-ci comme racines acceptables d'équations algébriques.

On peut, à la lumière de cet exemple et en simplifiant à outrance, diviser la révélation de la nouvelle facette de la personnalité du personnage mathématique i en deux étapes. D'abord la prise de conscience de l'existence même de cette facette, ici, par la mise en évidence, suite à des manipulations formelles, des symboles $\sqrt{-n}$, où n est un réel positif. Ensuite, la légitimisation de $\sqrt{-n}$ et son intégration par l'auteur-mathématicien à ce qui était antérieurement connu de la personnalité du nombre. Alors que la première étape est instantanée (considérant bien sûr qu'il faille un terrain fertile), la seconde est beaucoup plus longue, car elle implique une familiarisation avec le nouvel élément. Or pour l'apprivoiser, il faut le réinterpréter en des termes déjà familiers. C'est pourquoi il ne faut pas se surprendre de ce que l'acceptation des nombres complexes au XIX^e siècle fut tributaire de leur représentation géométrique ainsi que de leur interprétation physique, en électricité par exemple.

Le personnage-fonction dont nous avons brièvement regardé la préhistoire dans la chronique précédente a connu une évolution similaire. Je dis préhistoire car avant Leibniz et Daniel Bernoulli, puisqu'aucun mot n'est associé à la fonction, le personnage-fonction n'existe qu'à l'état embryonnaire. Ici et là, de bribes de personnalité se manifestent, mais elles ne s'unissent pas sous une même ombrelle, elles ne font pas corps.

Dans la dernière chronique, nous avons vu comment la loi de correspondance d'une fonction avait été exprimée de diverses façons depuis les Grecs jusqu'au début du XVIII^e siècle. D'abord chez Apollonius dans un langage basé sur les rapports, puis chez Oresme et Galilée par une comparaison de phénomènes. Dans ces cas, le traitement de la relation fonctionnelle ne fait l'objet d'aucune systématisation où des automatismes précis auraient permis l'apparition «automatique» de cas frontières. Chez Descartes, cette situation se modifie par l'introduction en géometrie des méthodes et des algorithmes de calcul de l'algèbre. Son domaine de référence reste toutefois la géométrie, ce qu'exprime bien le fait qu'il parle uniquement de courbes et qu'il ne sent pas le besoin d'employer un terme plus général. Sa vision algébrique l'oblige de restreindre aux seules courbes qu'il nomme géométriques (c'est-à-dire exprimables au moyen des 4 opérations élémentaires et de l'extraction des racines) celles qui font partie du domaine mathématique. Ce qui manque à Descartes, ce sont des processus dans lesquels les fonctions entreraient globalement, en soi. Or le calcul différentiel et intégral repose sur de tels processus. Aussi, est-il normal que ce furent Leibniz et Bernoulli qui sentirent le besoin de nommer cet élément de base du nouveau calcul. De même que les nombres négatifs et complexes se manifestèrent dans le cadre de la résolution d'équations, où ce que l'on cherchait est précisément un nombre satisfaisant une propriété précise, de même, c'est en cherchant à trouver une fonction, qui satisfasse une propriété précise, que la personnalité du personnage-fonction se manifestera. Ces propriétés prendront à partir du XVII^e siècle la forme d'équations aux dérivées partielles.

En algèbre, la possibilité qu'on puisse énoncer un théorème aussi simple et beau que «Une équation de degré *n* a *n* racines» induisait les mathématiciens à accepter les nombres négatifs et complexes comme nombres à part entière. Pour les équations aux dérivées partielles, un phénomène analogue jouera un rôle fondamental, celui de la détermination d'une fonction — expression symbolique — qui non seulement satisfasse l'équation mais aussi soit la plus générale possible. C'est dans le sens donné au mot *général* que repose l'histoire de la notion de fonction au XVIII^e et au début du XIX^e siècle. C'est ce que nous verrons maintenant.

EULER: Introduction in Analysin Infinitorum (1748)

L'un des grands moments de l'analyse infinitésimale est la publication en 1748, quelques années après sa rédaction, du célèbre traité d'Euler *Introduction in Analysin Infinitorum*. Ce magistral ouvrage marque de fait le début du calcul différentiel et intégral tel que nous le connaissons aujourd'hui. C'est par exemple dans celui-ci que le logarithme est défini comme l'inverse de l'exponentiation et que les fonctions trigonométriques sont abordées comme des rapports. Là aussi, dans la tradition de Leibniz et de Bernoulli, la fonction devient vraiment et pour de bon le concept clé du calcul.

Dès le début du chapitre premier du livre premier, Euler, après avoir défini quantité constante et quantité variable, définit la fonction (définition 4)[2]:

> Une fonction d'une quantité variable est une expression analytique composée d'une manière quelconque de cette quantité variable et de nombres ou de quantités constantes.

On remarque que cette définition correspond presqu'exactement à celle donnée par Jean Bernoulli en 1718 (Voir la chronique de mai 1987) si ce n'est que le mot «quantité» de Bernoulli a été remplacé par «expression analytique». Le sens de ces termes se trouve clarifié quelques paragraphes plus loin lorsqu'Euler souligne que les opérations admissibles dans ces expressions analytiques sont non seulement les 4 opérations élémentaires auxquelles s'ajoutent l'extraction des racines, mais aussi les opérations transcendantes telles que l'exponentielle, le logarithme, et «d'innombrables autres, que fournit le Calcul intégral» (autrement dit les équations différentielles)[3]. Les fonctions sont donc avant tout des expressions symboliques. De là, il semble que l'on puisse inférer qu'à deux expressions différentes correspondent deux fonctions différentes. Or, cela n'est clairement pas le cas, comme par exemple lorsque l'on fait un changement de variable, et Dieu sait l'importance de ce procédé dans la résolution des équations différentielles. À mesure qu'il avance dans son traité, Euler devient très conscient de cela et distingue clairement la fonction en tant que telle; et une «expression analytique» qui la représente. Néanmoins, ce lien entre fonction et sa représentation comporte une zone grise, en l'occurrence la partie de ce que nous appelons le domaine de définition sur lequel l'expression analytique représente effectivement la fonction. Euler divise les fonctions en deux groupes, les fonctions *continues* qui sont celles dont l'«expression analytique» décrit exactement le lien fonctionnel sur tout $\mathbb{R}$, et les fonctions *discontinues* ou *mixtes* (ou *mécaniques* ou *irrégulières*) qui sont celles représentées par une «expression analytique» sur un intervalle et une autre sur un autre intervalle, autrement dit qui sont continues (au sens d'Euler) par morceaux. En fait, Euler, comme tous ses contemporains, croit que toute fonction est développable en séries entières

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots$$

sauf peut-être en un nombre fini de points[4]. Cette conception découle entre autres de ce qu'on pensait que toute équation algébrique est résoluble par radicaux. Puisque la loi de correspondance a dans les faits une forme bien particulière, on voit que la notion eulérienne de fonction est beaucoup plus restrictive que la nôtre.

La controverse de la corde vibrante (1747-1750)

La complexité de la personnalité du personnage-fonction se révélera particulièrement dans la controverse de la corde vibrante qui opposa au milieu du XVIII^e siècle D'Alambert, Euler, Daniel Bernoulli, puis plus tard Lagrange, en somme une brochette des meilleurs mathématiciens de l'époque.

L'étude de la vibration d'une corde vibrant entre deux points d'attache a débuté dès 1728 avec les travaux de Jean Bernoulli (1667-1748), qui avait abordé le problème en le discrétisant. Ce fut toutefois Jean le Rond D'Alembert qui le premier en donna en 1747 une solution à partir d'une analyse continue du phénomène. Il obtient alors l'équation

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

avec les conditions aux bornes suivantes:

$y(0, t) = 0$ (attache à gauche reste immobile);
$y(\ell, t) = 0$ (attache à droite reste immobile);
$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t}(x = 0) = 0$ (la corde est en repos au départ)

$y(x, 0) = f(x)$ (au départ $[t = 0]$ la forme de la corde est donnée par $f(x)$).

De là, D'Alembert déduit la forme d'une solution. Néanmoins, la question surgit de savoir si la solution qu'il propose est la plus générale possible. Autrement dit, la solution de D'Alembert convient-elle à toutes les formes que pourrait prendre la corde au temps zéro? En fait, l'auteur souligne les conditions que doit satisfaire f pour que sa méthode s'applique: 1) la courbe f doit être deux fois différentiable, comme l'équation aux dérivées partielles; 2) f doit être périodique, de période 2ℓ ; 3) f doit être continu au sens d'Euler, c'est-à-dire représentable sur tout $\mathbb{R}$ par une seule expression symbolique.

En 1749, Euler reprend l'étude de D'Alembert, mais refuse de se limiter aux fonctions satisfaisant les conditions énoncées. Alors que D'Alembert se fixait sur l'expression symbolique d'une fonction, en confondant de fait la fonction et son expression, Euler, fort de l'évolution déjà perceptible vers la fin de son *Introductio,* aborde la question en considérant la courbe que forme la corde au temps initial[5].

> ... la première vibration dépend de notre bon plaisir, puisqu'on peut, avant de lâcher la corde, lui donner une figure quelconque...

Il peut donc considérer des «courbes anguiformes, soit régulières, contenues dans une certaine équation, soit irrégulières ou mécaniques». On perçoit ici une nette évolution dans la pensée d'Euler par rapport à la définition de fonction donnée en 1748 au début de son *Introductio.* Euler, dans ce cas, mais plus généralement dans le domaine de la résolution des équations aux dérivées partielles, évolue vers une vision plus large des fonctions traitables mathématiquement. Malgré tout, certaines restrictions demeurent. Cela apparaît dans sa réaction au mémoire de Daniel Bernoulli présenté à l'Académie de Berlin en 1763. Dans ce mémoire, l'auteur propose la solution

$$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{\ell} \cos \frac{\pi c t}{\ell} + \beta \sin \frac{2\pi x}{\ell} \cos \frac{2\pi c t}{\ell} + \ldots$$

en considérant que chaque terme de la série représente une harmonique de la corde et que la solution représente la somme, éventuellement infinie, de toutes les harmoniques possibles. De là, il déduit qu'au départ la forme de la corde est représentée par

$$f(x) = \alpha \sin \frac{\pi x}{\ell} + \beta \sin \frac{2\pi x}{\ell} + \ldots$$

Quelle que soit la position de la corde au départ, elle est donc continue (au sens d'Euler), car représentable par une expression analytique unique. Toutefois, Bernoulli ne sait pas comment déterminer les valeurs des coefficients α, β, ... mais il suppose que si on savait comment faire la série on aurait la généralité d'une série entière.

Euler répondit immédiatement à Bernoulli en soutenant que, puisque les termes de la série sont tous des fonctions sinus, elles sont impaires et périodiques de période 2ℓ, ces propriétés doivent être transférées à la fonction représentée. Or, à l'époque, on croyait que si deux expressions symboliques sont égales sur un intervalle, elles le sont partout. Toutefois il existe des fonctions algébriques qui satisfont les conditions aux bornes, mais qui ne sont clairement pas impaires et périodiques. La solution de Bernoulli ne peut donc selon Euler être générale.

Euler, Institutiones calculi differentialis (1755)

Alors qu'Euler participe à la controverse de la corde vibrante, il publie son magistral *Institutiones calculi differentialis* (1755). Il y donne une définition de fonctions beaucoup plus ontologiques que symboliques[6]:

> Si des quantités dépendent d'autres quantités de telle sorte que si les premières sont modifiées les secondes sont aussi modifiées, alors les dernières quantités sont appelées fonctions des premières. Cette appellation est de nature la plus large et comprend toute méthode par laquelle une quantité peut être déterminée par d'autres. Si donc, x dénote une quantité variable, alors toutes les quantités qui dépendent de x d'une quelconque façon ou sont déterminées par elles sont appelées fonctions de celle-ci.

Une constante n'est pas une fonction dans ce sens. On voit clairement ici l'influence de la controverse de la corde vibrante sur la pensée d'Euler. En 1748, il est parti d'une définition où la fonction est une expression symbolique calculable; il en vient en 1755 à une définition où la fonction est une quantité variable dont la caractéristique est simplement de dépendre d'autres quantités.

La nature du problème de la corde vibrante imposait que la fonction donnant la position initiale soit nécessairement continue. Si la corde est coupée (ce qui permettrait d'avoir une fonction à l'origine discontinue), il n'y aurait pas bien sûr de vibration possible. Le domaine d'acceptabilité reste donc fort restreint.

La fin du XVIII^e siècle

Dans d'autres problèmes de physique, mais ayant eu moins d'impact dans la communauté mathématique, Euler montre que la généralité de la définition de fonction de 1655 va au-delà d'une simple intention. Ainsi, en 1765, dans une étude sur la génération et la propagation du son dans l'air[6], Euler introduit des fonctions dont la valeur est partout nulle sauf en un point, (nous dirions aujourd'hui une fonction de Dirac) obtenant ainsi, et l'utilisant comme tel, une base non-dénombrable de l'ensemble des fonctions réelles. Cette grande liberté d'esprit a été suscitée par la nature du problème physique traité. Contrairement à la corde qui doit être d'un seul tenant, l'air, dont la nature et le comportement sont pour nous beaucoup moins intuitifs, laisse place à l'introduction de discontinuités. Ce manque d'intuition redonne au symbolisme une liberté auparavant brimée par des a priori physiques.

Malgré les exceptions comme celles ci-haut, Euler reste attaché à la nécessité pour les bonnes fonctions d'être représentées par une seule expression symbolique sur tout le domaine réel. Ainsi, en 1768, dans son *Institutiones calculi intregralis*[8] notant qu'en général une augmentation infiniment petite d'une variable entraîne une petite variation de la fonction, il ajoute un peu plus loin qu'il y a des fonctions qui, en certains points, varient beaucoup alors que la variable varie peu et donne l'exemple de la fonction

$$X = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \text{ au point } x = 1.$$

Jusqu'au début du XIX^e siècle, les définitions de fonction reprennent en gros celle d'Euler données en 1755. Par exemple celle de Condorcet, de 1778[9]:

> Je suppose que j'ai un certain nombre de quantités x, y, z, ..., F et que pour chaque valeur déterminée de x, y, z, ... etc., F ait une ou plusieurs valeurs déterminées qui y répondent: je dis que F est une fonction de x, y, z, ...

Et encore celle de Lacroix, de 1797[10]:

> Toute quantité dont la valeur dépend d'une ou de plusieurs autres quantités, est dite *fonction* de ces dernières, soit qu'on sache ou qu'on ignore par quelles opérations il faut passer pour remonter de celles-ci à la première.

Toutefois, dans le quotidien des mathématiciens, la définition d'Euler de 1748 suffit. La meilleure preuve en est la définition de fonction donnée par Lagrange en 1797[11]:

> On appelle fonction d'une ou de plusieurs quantités, toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d'une manière quelconque mêlées ou non d'autres quantités qu'on regarde comme ayant des valeurs données et invariables tandis que les quantités de la fonction peuvent recevoir toutes les valeurs possibles.

La fonction mathématique est redevenue une «expression de calcul». De fait, Lagrange se prépare à construire une théorie basée sur l'hypothèse que toute fonction est représentable par une série entière.

Il faudra un nouveau problème pour faire évoluer de façon significative la personnalité de la fonction. Ce sera l'étude entreprise en 1805 par Fourier de la propagation de la chaleur dans les corps solides qui débloquera à nouveau la situation et rendra à la seconde définition d'Euler son droit de cité en mathématiques. C'est ce que nous verrons dans la prochain et dernier épisode de la recherche d'un auteur par un personnage, la fonction.

NOTES

1 - Par la suite, le mot auteur sera employé au singulier, mais il continuera de signifier l'ensemble des mathématiciens.

2 - Traduction de Dahan-Dalmedico, A., Peiffer, J., (1982) *Une Histoire des mathématiques*, Seuil (Coll. Point, S49), p. 221; texte original dans les œuvres complètes d'Euler, *Opera Omnia*, ser. 1, vol 8, p. 18.

3 - Boyer, C. (1956), *History of Analytic Geometry*, Scripta Mathematica, p. 180.

4 - En fait la représentation prenait aussi la forme de produit infini, de fractions continues.

5 - Youschkevitch, A.P. (1976), The Concepts of Function up to the Middle of the 19th Century, *Archives for the History of Exact Sciences*, vol. 16, p. 62 ou Euler, L. (1748), *Introductio in Analysin Infinitorum*, section 6, du livre I, chap. 1, (dans les *Opera Omnia* ser. 1, vol. 8, p. 19). Ma traduction.

6 - Youschkevitch (1976), p. 70.

7 - Youschkevitch (1976), p. 71, note 22a.

8 - Youschkevitch (1976), p. 72.

9 - *Traité du calcul intégral*, texte manuscrit, cité dans Youschkevitch (1976), p. 75.

10 - *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, tome I, p. 1.

11 - *Théorie des fonctions analytiques, Œuvres de Lagrange*, t. 9, p. 15, cité dans Youschkevitch (1976), p. 63, note 17.

Quelques nouvelles

1. L'APAME annonce que l'Olympiade mathématique pour les élèves du primaire a connu un très vif succès. Plus de 90 000 élèves y ont participé. La prochaine olympiade mathématique, appelée MATHÉMATHLON, aura lieu seulement en 1989. En 1987-1988, les élèves des 3^e, 4^e, 5^e et 6^e années s'entraîneront... Félicitations et bravo pour cette belle activité!

2. Madame Noëlange Boisclair s'est joint, depuis juillet dernier, au Comité de rédaction du Bulletin AMQ. Nous sommes heureux de sa collaboration. Nous savons que Madame Boisclair a toujours été active au sein de l'AMQ depuis sa fondation.

3. Monsieur Jean-Marie Labrie, secrétaire de l'information de l'AMQ et éditeur du Bulletin AMQ depuis cinq ans, est maintenant professeur à la Faculté d'éducation de l'Université de Sherbrooke. En juin dernier, comme consultant, il fut envoyé par l'Université de Sherbrooke en mission au Burkina Faso. Félicitations et bon succès dans ces nouvelles fonctions!

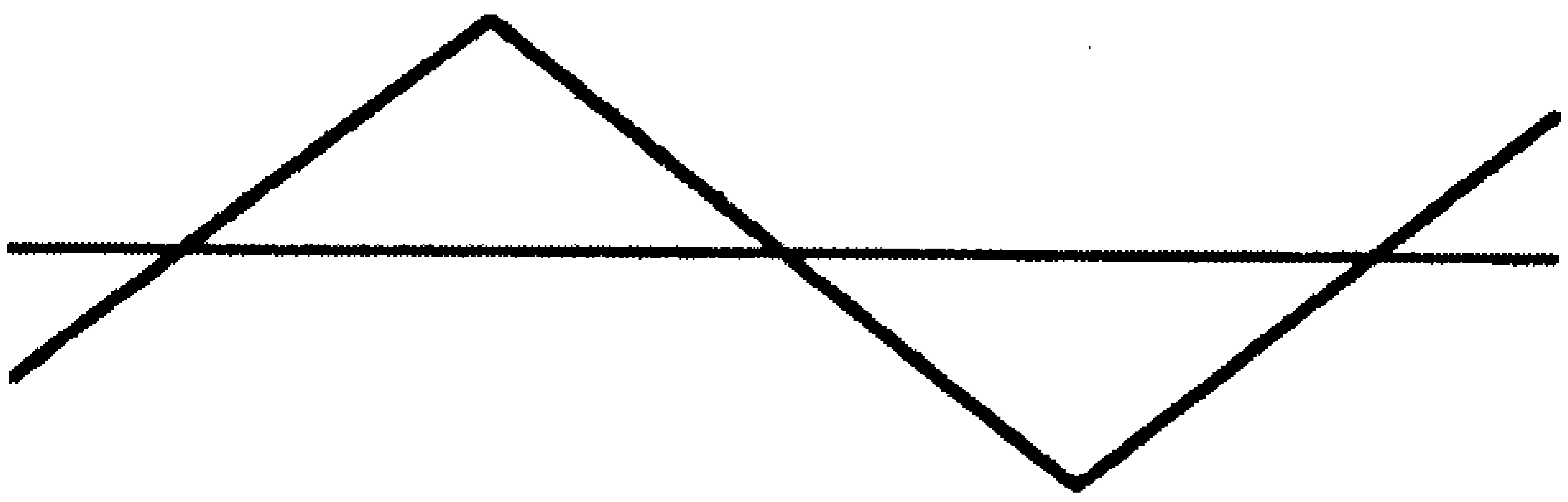
4. 1988 marquera le 30^e anniversaire de fondation de l'Association mathématique du Québec (AMQ). Que ferons-nous? que devrions-nous faire? Envoyez-nous vos suggestions.

Louis Charbonneau
Dépt Math. et Inf., UQAM

FONCTION (III): EN ÉTAT DE CRISE, SA PERSONNALITÉ SE DÉVOILE
Le début du XIX^e siècle

Le formalisme du XVIII^e siècle

Nous avons vu dans la dernière chronique comment la notion de fonction a évolué d'un formalisme pur (la fonction comme expression symbolique) vers une notion plus ontologique (la fonction comme interrelation entre deux ou plusieurs variables). Néanmoins, il ne faut pas se laisser jouer par les mots. Notre lecture des définitions de Condorcet ou de Lacroix peut facilement être imbibée de la conception actuelle de fonction. Or, nous l'avons dit, les facettes de la personnalité de la fonction qui sont connues au début du XIX^e siècle sont circonscrites. En fait, les seules fonctions dont on trouve des exemples, à part des cas isolés qui n'eurent pas assez d'impact de modifier les idées généralement admises, sont des fonctions continues (au sens actuel) dérivables sauf en un nombre fini de points.[1] On les divisait en deux grandes catégories: les fonctions continues (sens d'Euler) c'est-à-dire dont une seule expression symbolique suffit à exprimer le lien fonctionnel sur le domaine (habituellement R), et les fonctions mixtes, c'est-à-dire les fonctions dont le lien fonctionnel est exprimé par une expression symbolique qui change selon l'intervalle dans lequel x prend sa valeur. Dans cette deuxième catégorie, les fonctions sont essentiellement des fonctions du type «dents de scie»



Cette subdivision des fonctions usuelles était aussi envisagée sous l'optique de la représentabilité par une série entière.[2] Comme la démarche de Lagrange en 1797 l'indique, on croyait, sans bien sûr jamais l'avoir démontré, que toute fonction Euler-continue était représentable par une série entière. Mais, par un manque de précision sur le domaine des fonctions considérées, cette catégorie de fonctions se trouvait mal définie car on pensait de plus que si une série entière est égale à une autre expression symbolique sur un intervalle, sauf peut-être pour un nombre fini de points, elle doit y être égale pour toute valeur réelle de la variable.

Cette ambiguïté sur le degré de représentabilité d'une fonction par une série vient de ce que la notion de convergence d'une série était elle-même ambiguë. Non pas que les mathématiciens de l'époque confondaient série convergente et série divergente. En fait, l'expression «série convergente», dans son sens moderne, avait été introduite par Newton en 1670[3]. De plus, le critère de convergence des séries alternées avait été énoncé par Jean Bernoulli dès 1713, le test aujourd'hui connu sous le nom de «test de Cauchy» avait été énoncé en réalité en 1742 par Maclaurin, le test de d'Alembert pour la convergence absolue date quant à lui de 1768.[4] Néanmoins dans la pratique, on ne se limite pas à des séries convergentes. Laissons Euler nous expliquer pourquoi:[5]

> Disons, donc, que la somme de toute série infinie est l'expression finie de laquelle cette série infinie est générée. Dans ce sens, la somme de la série infinie $a-x+x^2-x^3+\ldots$ sera $1/1+x$, car la série provient du développement de la fraction, quel que soit le nombre mis à la place de x. Si on accepte cela, la nouvelle définition du terme *somme* coïncide avec le sens ordinaire lorsqu'une série converge; et puisqu'une série divergente n'a pas de somme, dans le sens habituel du mot, il n'y a pas d'inconvénient à employer cette nouvelle terminologie. Enfin, par le moyen de cette définition, nous pouvons préserver l'utilité des séries divergentes et répondre à toute objection à leur utilisation.

L'importance des séries découle de ce qu'une expression symbolique et sa représentation par une série possèdent des propriétés mathématiques analogues.

Au début du XIX^e siècle, les mathématiciens se trouvent donc en face de fonctions dont ils pensent connaître la personnalité. Elles laisseront entrevoir leur côté caché lorsque, dans les travaux de Fourier sur la propagation de la chaleur dans les solides, elles choqueront les mathématiciens en

1 Par exemple Poinsot, dans son article *Des principes fondamentaux et des règles générales du calcul différentiel* paru en 1814 tente de démontrer cela et dit «et c'est ce que la considération d'une courbe et de sa tangente, dont l'existence n'est pas douteuse, fait voir avec la dernière évidence». Citation tirée de Dugac, P., 1978a, *Sur les fondements de l'analyse de Cauchy à Baire,* thèse de doctorat d'état (Université Pierre et Marie Curie), p. 36.

2 Notons qu'on employait aussi des représentations par des séries de fonctions trigonométriques mais avant tout pour des raisons d'approximation dans les calculs astronomiques. De ce fait, ces séries demeuraient marginales au courant dominant des mathématiques.

3 Dans le manuscrit de son *De Methodu serierum et Fluxionum.* Voir *The Mathematical Papers of Isaac Newton,* Whiteside (éd.), Vol. III (1670-1673), Cambridge (Un. Press), pp. 68-69, note 72.

4 Pour le traitement des séries au XVIII^e siècle, voir le chapitre 20 de Kline, M., 1972, *Mathematical Thought form Ancient to Modern Time,* Oxford Un. Press, pp. 436 à 467.

5 Cité dans Barbeau, E. J., Leah, P. J., 1976, Euler's 1760 Paper on Divergent Series, *Historia Mathematica,* vol. 3, p. 142.

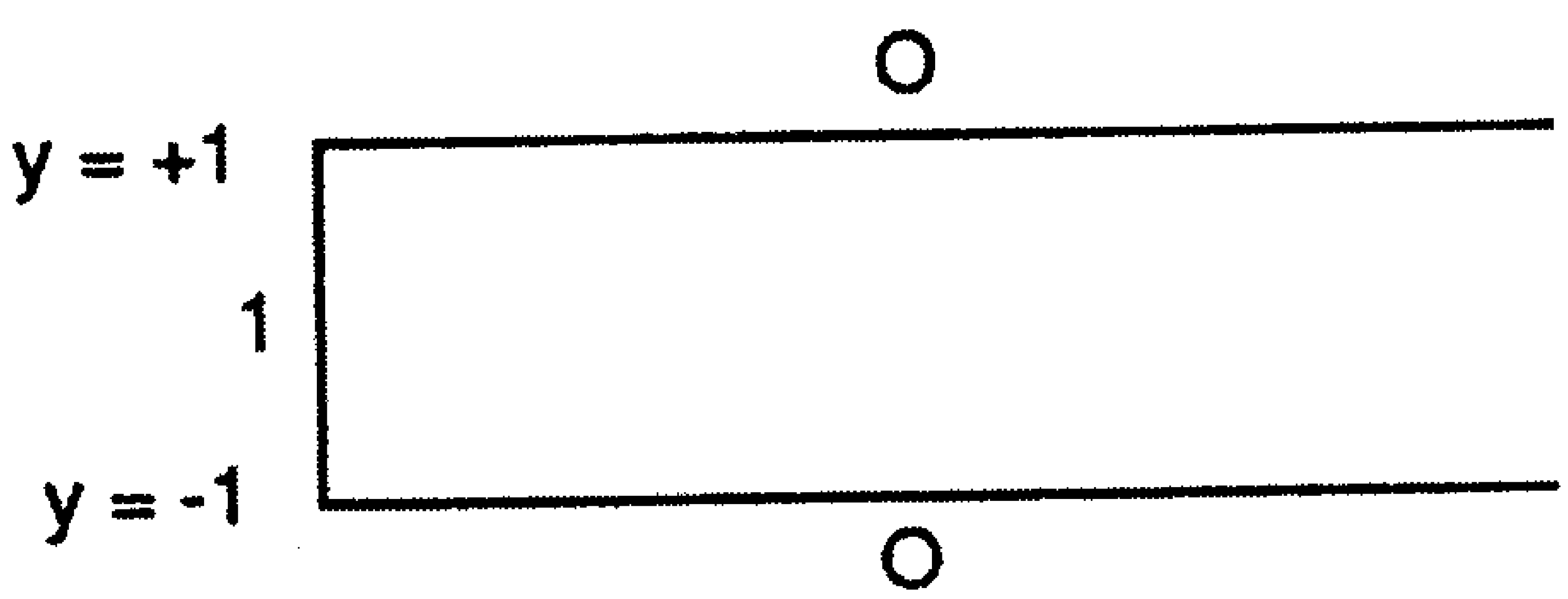
montrant que les deux façons de les subdiviser sont loin de correspondre l'une à l'autre.

Joseph Fourier ou les fonctions discontinues entrent en scène

En 1800, Fourier est nommé par Napoléon préfet de l'Isère, à Grenoble. C'est là qu'il commence ses travaux sur la théorie mathématique de la propagation de la chaleur. En décembre 1807, il présente un long mémoire sur ce sujet à l'Académie des sciences de Paris.[6] En 1812, une version augmentée de ce mémoire gagne un concours de l'Académie sur ce thème.[7] Ce n'est toutefois qu'en 1822 qu'il publie le détail de ses recherches dans son maintenant célèbre traité *Théorie analytique de la chaleur.*[8]

En quoi consiste les problèmes abordés par Fourier?[9]

> On suppose qu'une lame ou une surface rectangulaire, d'une longueur infinie, soit échauffée par son extrémité 1, et conserve dans tous les points de cette arête une température constante 0. Il s'agit de déterminer qu'elles doivent être les températures stationnaires de chaque point de la lame.
>
> On suppose qu'il ne se fait à la superficie aucune déperdition de chaleur, et pour donner en quelque sorte une existence physique à la question, on peut se représenter que l'épaisseur de la lame est infiniment grande et qu'elle se trouve ainsi comprise entre trois plans perpendiculaires au plan horizontal, dont l'un passant par l'arête transversale est assujetti dans tous ses points à la température 1 et dont les autres qui passent par les arêtes parallèles sont dans toute leur étendue à la température 0. On prend pour l'axe des x la ligne qui divise la surface en deux parties égales, et les coordonnées des différents points sont x et y.



Lorsque les températures z se sont stabilisées, l'état de la lame étant «celui qui subsisterait de lui-même s'il était formé», elles sont exprimées par

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

avec les conditions aux bornes $z(0,y) = 1$ pour y entre -1 et 1 et $z(x,\pm 1) = 0$. La donnée du problème étant claire, il commence à le résoudre en séparant les variables et supposant $z(x,y) = \varphi(x)\varphi(y)$. Il constate alors que l'équation sera satisfaite si $z(x,y) = ae^{mx}\cos(ny)$ et il déduit que m = n. La solution particulière retenue a donc la forme $ae^{-nx}\cos(ny)$. Puisque par ailleurs $v(0,\pm 1) = 0$, on doit avoir $\cos(\pm n) = 0$, d'où $n = \frac{2i+1}{2}\pi$, où i est un nombre naturel. La solution générale, somme de toutes les solutions particulières est donc:

$$z(x,y) = a_1 e^{-\pi x/2} \cos(\tfrac{1}{2}\pi y) + a_2 e^{-3\pi x/2} \cos(\tfrac{3}{2}\pi y) + a_3 e^{-5\pi x/2} \cos(\tfrac{5}{2}\pi y) + \ldots$$

La condition $z(0,y) = 1$, impose que

$$1 = a_1\cos(\tfrac{1}{2}\pi y) + a_2\cos(\tfrac{3}{2}\pi y) + a_3\cos(\tfrac{5}{2}\pi y) + \ldots$$

Et Fourier ajoute[10]:

> On a supposé que tous les points de la première arête 1 ont une même température: on rendrait la question plus générale en attribuant à chacun des points de cette arête une température fixe, mais différente pour les différents points, les deux arêtes 0 et 0 étant toujours entretenues à une température nulle.

Ainsi, si la température à l'extrémité est donnée par $z(0,y) = f(y)$, on doit avoir l'égalité

$$f(y) = a_1\cos(\tfrac{1}{2}\pi y) + a_2\cos(\tfrac{3}{2}\pi y) + a_3\cos(\tfrac{5}{2}\pi y) + \ldots$$

Afin de déterminer la valeur des a_i, il suppose que f(x) est développable en série entière et il effectue des dérivations terme à terme pour enfin résoudre un système d'une infinité d'équations à une infinité d'inconnues, le tout sans aucune justification. Il arrive finalement à une expression simple des a_i:

$$a_i = \int_{-1}^{+1} f(t) \cos\left(\frac{2i+1}{2}\pi t\right)dt.$$

Mais ce ne sera que dans l'étude de la propagation de la chaleur dans un anneau que Fourier met clairement en évidence la propriété d'orthogonalité des fonctions sinus et cosinus qui permet de calculer par une intégrale les coefficients de la série qui porte aujourd'hui son nom.

Fourier applique alors son procédé à diverses fonctions, correspondant à diverses distributions possibles de la chaleur, et en donne ainsi leur développement en série trigonométrique. Mais contrairement à l'imposition de la continuité, inhérente à la nature physique du problème de la corde vibrante et de la grande majorité des problèmes de physique

6 Ce mémoire ne fut publié qu'en 1972 dans Grattan-Guinness, I., 1972, *Joseph Fourier, 1768-1830*, MIT Press.

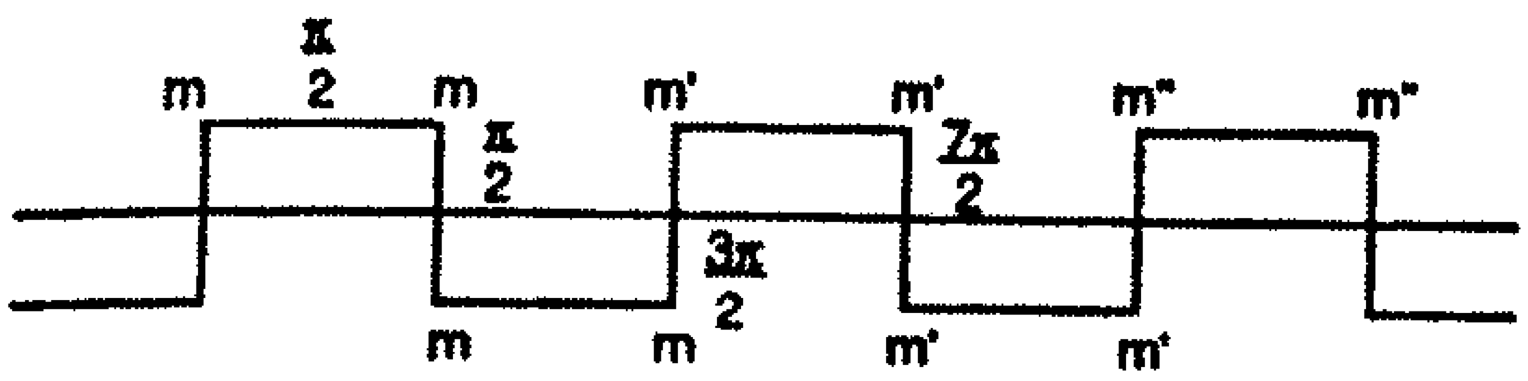
7 Publié en deux parties dans les *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, vol. 4 (en 1824) et 5 (en 1826), cette deuxième partie est reprise dans les *Oeuvres de Fourier*, tome second, Paris 1890.

8 Repris dans les *Oeuvres de Fourier*, tome premier, Paris, 1888.

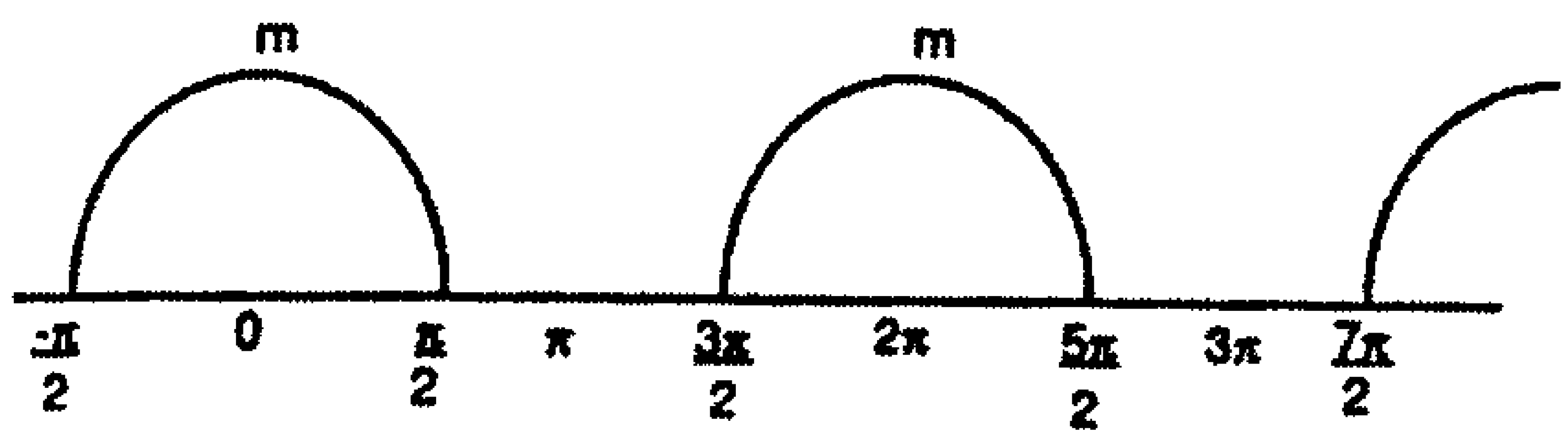
9 Mémoire de 1807, article 32, dans Grattan-Guinness, 1972, pp. 134-135.

10 Mémoire de 1807, art. 34, dans Grattan-Guinness, 1972, p. 139.

mathématique au XVIII^e, ici cette exigence n'intervient pas. D'ailleurs, la température au bout de la lame, qui est 1 sauf pour y = ±1 où elle est 0, est discontinue. Aussi, prenant soin de préciser que le développement ne vaut que sur un certain intervalle, il calcule le développement de fonctions dont certaines sont discontinues par exemple:[11]



ou simplement non Euler-continues, par exemple:[12]



Pouvoir représenter de telles fonctions par une seule expression symbolique vient contredire les croyances de l'époque. D'une part, il devient maintenant clairement impossible de diviser les fonctions en fonctions Euler-continues et en fonctions mixtes, car Fourier exhibe des fonctions que l'on croyait jusqu'alors mixtes mais qui, maintenant représentées par une seule série trigonométrique sur leur domaine, doivent être considérées comme Euler-continues. Mettant ainsi au ban la classification habituelle, Fourier ouvre une véritable boîte de Pandore en remettant en question une vérité communément acceptée, il oblige à tout remettre en question. Aussi prévoit-il les questions que suscitera nécessairement son mode de représentation par des séries. Il replace le tout dans le contexte du problème de physique qu'il traite et insiste sur la convergence des séries obtenues:[13]

> Pour que ces solutions fussent générales et qu'elles eussent une étendue équivalente à celle de la question, il était nécessaire qu'elles pussent convenir avec l'état initial des températures qui est arbitraire. L'examen de cette condition fait connaître que l'on peut développer en séries convergentes, ou exprimer par des intégrales définies, les fonctions qui ne sont point assujetties à une loi constante et qui représentent les ordonnées des lignes irrégulières ou discontinues [notez la terminologie d'Euler]. Cette propriété jette un nouveau jour sur la théorie des équations aux différences partielles et étend l'usage des fonctions arbitraires en les soumettant au procédés ordinaires de l'analyse.

Mais comment démontrer la convergence de ses séries? Fourier raisonne alors un peu comme Daniel Bernoulli l'avait fait un demi-siècle auparavant. Ayant noté que dans ces séries les coefficients des fonctions sinus et cosinus sont de fait des intégrales définies prises entre deux bornes finies, il ajoute:[14]

> Les valeurs de ces intégrales définies sont analogues à celle de l'aire totale $S(\varphi(x)dx)$ comprise entre la courbe et l'axe dans un intervalle déterminé, ou à celles des quantités mécaniques, telles que les coordonnées du centre de gravité de cette aire. Il est évident que ces quantités ont des valeurs assignables, soit que la figure des corps soit régulière, soit qu'on donne à ces corps une forme discontinue et entièrement arbitraire. (...) il est nécessaire de démontrer qu'une fonction quelconque peut toujours être développée en séries de sinus ou de cosinus d'arcs multiples, et de toutes les preuves de cette proposition, la plus complète est celle qui consiste à résoudre effectivement une fonction arbitraire en une telle série, en assignant les valeurs des coefficients.

Il est à remarquer que l'interprétation de l'intégrale en terme de surface est un retour aux sources. Le formalisme du XVIII^e siècle avait entraîné les mathématiciens à considérer l'intégrale essentiellement comme l'inverse de la dérivée. De plus, l'approche pragmatique de la convergence ne satisfait pas les contemporains, surtout les jeunes, et oblige à se poser des questions sur la nature de la convergence, et les moyens de la prouver. Un autre élément ambigu se manifeste dans les textes de Fourier: les points de discontinuité. En effet, si on examine les graphes des fonctions (voir ci-haut), on remarque que lors d'un saut, Fourier rend «continue» le graphe en réunissant par un trait vertical des deux parties continues. À quoi converge la série infinie pour une valeur de x correspondant à un tel trait vertical, Fourier n'en dit mot si ce n'est que les graphes des sommes partielles de la série s'approchent de plus en plus de cette verticale. L'introduction des fonctions discontinues dans la sphère mathématique amène Fourier, dans l'un des derniers articles de sa *Théorie analytique de la chaleur*, à donner une définition déjà presque ensembliste de fonction:[15]

> En général, la fonction f(x) représente une suite de valeurs, ou ordonnées, dont chacune est arbitraire. L'abscisse x pouvant recevoir une infinité de valeurs, il y a un pareil nombre d'ordonnées f(x). Toutes ont des valeurs numériques actuelles, ou positives, ou négatives, ou nulles. On ne suppose point que ces ordonnées soient assujetties à une loi commune; elles se succèdent d'une manière quelconque, et *chacune d'elles est donné comme le serait une seule quantité.* [C'est moi qui souligne]

Contrairement aux définitions de fonction quelconque données antérieurement, la perspective est clairement ponctuelle. Avec Fourier, on passe d'une vision globale de la fonction (Euler 1748, mais aussi Condorcet et Lacroix) à une vision pointilliste.

[11] Mémoire de 1807, article 48, Grattan-Guinness, 1972, p. 184.
[12] Mémoire de 1807, article 72, Grattan-Guinness, 1972, p. 234.
[13] Fourier, 1822, article 14.
[14] Mémoire de 1807, article 75, Grattan-Guinness, 1972, p. 250 et 252.
[15] Fourier, 1822, article 417.

Cauchy

Au début des années 1820, la théorie de la propagation de la chaleur de Fourier oblige donc les mathématiciens à préciser: 1) la notion de convergence d'une série de fonctions, 2) le sens de l'intégrale en tant que mesure, 3) le traitement des fonctions aux points de discontinuité, 4) le sens de la notion de fonction.

Ce n'est qu'un début...

Malgré la date relativement tardive de la publication en 1822 du célèbre traité de Fourier, les mathématiciens parisiens connaissaient ses travaux. Poisson avait publié en 1808 un résumé du mémoire de 1807 de Fourier. Laplace et Lagrange avaient aussi réagi avec réserve aux mémoires de 1807 et 1812. Les résultats de Fourier ont un impact particulièrement vif car ils se présentent alors que le monde mathématique devient de plus en plus conscient de la faiblesse des bases sur lesquelles repose le calcul différentiel et intégral. Les questions que soulève la théorie de la chaleur de Fourier accentuent encore cet inconfort.

Deux œuvres jouent un rôle central vers l'édification de fondements solides pour le calcul. Ce sont des notes de cours données par Cauchy à l'École Polytechnique de Paris. Au début de son *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique*[16] de 1821, après avoir noté que jusqu'alors on attribuait aux «formules algébriques une étendue indéfinie, tandis que, dans la réalité, la plupart de ces formules subsistent uniquement sous certaines conditions, et pour certaines valeurs des quantités qu'elles renferment», il entreprend de reformuler le calcul en partant d'une approche nouvelle et rigoureuse de la notion de limite. Dans le premier chapitre, il donne une définition encore eulérienne de fonction:

> Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles que, la valeur de l'une d'elles étant donnée, on puisse en conclure les valeurs de toutes les autres, on conçoit d'ordinaire ces diverses quantités exprimées au moyen de l'une d'entre elles, qui prend alors le nom de variable indépendante et les autres quantités exprimées au moyen de la variable indépendante sont ce qu'on appelle des fonctions de cette variable.

Mais, il ajoute:

> Pour qu'une fonction d'une seule variable soit complètement déterminée, il est nécessaire et il suffit que, de chaque valeur particulière attribuée à la variable, on puisse déduire la valeur correspondante de la fonction.

On voit ici poindre, pas encore aussi clairement que chez Fourier, une vision pointilliste de la fonction. Mais ce qui bouleversera complètement le décor dans lequel évolue la notion de fonction est la nouvelle définition de fonction continue qu'il présente et qui, de ce fait, divise la totalité des fonctions en deux catégories aujourd'hui familières, les fonctions continues et les fonctions discontinues. Alors que la définition d'Euler de continuité d'une fonction reposait sur une perception globale (sur tout le domaine de la fonction), Cauchy aborde la continuité de façon locale. La fonction est continue en un point x si la différence $|f(x + \alpha) - f(x)|$ «décroît indéfiniment avec celle de α». Dans ce cours, pour la première fois, une étude systématique de la convergence des séries infinies est entreprise, rejetant à la périphérie de l'analyse les séries divergentes.

À la vingt et unième leçon de son *Résumé des leçons données à l'École polytechnique sur le calcul infinitésimal*, publié en 1823,[17] Cauchy donne pour la première fois une définition de l'intégrale définie d'une fonction continue indépendante de la notion de dérivée.[18] Il donne aussi l'exemple de la fonction $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ dont le développement de Taylor est identiquement nul autour de 0 alors que la fonction ne l'est pas. Le besoin de traiter délicatement les séries représentant une fonction devient omniprésent.

Avec ces nouveaux outils et cette nouvelle rigueur, quelques mathématiciens vont reprendre la question de la

---

16 Cauchy, 1821, *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique*, Paris, aussi dans *Oeuvres complètes*, sér. 2, t. III, Paris 1897. Pour les citations, voir le début des chapitres I et II.

17 Cauchy, 1823, *Résumé des leçons données à l'École polytechnique sur le calcul infinitésimal*, Paris, 1823, aussi dans *Oeuvres complètes*, sér. 2, t. IV, pp. 5 à 261, Paris 1899.

18 Voir Dugac, P. 1978, Fondements de l'analyse, dans Dieudonné, J. (éd.), 1978 *Abrégé d'histoire des mathématiques, 1700-1900*, Hermann, pp. 254-255.

convergence de la série de Fourier d'une fonction. Ainsi, Dirichlet, qui avait connu Fourier lors de son séjour à Paris de 1822 à 1825, montre en 1829 que «l'on peut représenter par une série trigonométrique toute fonction se reproduisant périodiquement après l'intervalle 2π, et 1° qui est généralement susceptible d'intégration; 2° qui n'a pas un nombre infini de maxima et de minima; 3° qui, dans le cas où sa valeur varie brusquement, prend la valeur moyenne entre les valeurs limites prises de part et d'autre de la discontinuité.»[19] À la fin de ce mémoire, il s'interroge sur ce qui se passe lorsqu'une fonction a un nombre infini de discontinuités. À cette occasion, il discute des limites de la définition d'intégrale définie de Cauchy. C'est alors que Dirichlet donne pour la première fois une définition d'une fonction ayant un nombre infini de discontinuités ($f(x) = c$ si x est rationnel et $f(x) = d \neq c$ si x est irrationnel), fonction qu'il qualifie de vraiment «arbitraire».

En 1854, Bernard Riemann se demande «mais une fonction ne remplissant pas les deux premières conditions [de Dirichlet] peut-elle, et dans quel cas peut-elle être représentée par une série trigonométrique?»[20] Pourquoi cette question? Riemann y répond lui-même:[21]

En premier lieu, comme Dirichlet lui-même le remarque à la fin de son Mémoire, cet objet est intimement lié avec les principes du Calcul infinitésimal, et peut servir à apporter dans ces principes une plus grande clarté et une plus grande précision. Sous ce rapport, l'étude de cette question offre un intérêt immédiat.

Mais, en second lieu, l'application des séries de Fourier n'est pas restreinte aux seules recherches physiques; on l'emploie aussi maintenant avec succès dans une branche des Mathématiques pures, la Théorie des nombres, et ici ce sont précisément les fonctions dont Dirichlet n'a pas étudié la représentation en série trigonométrique qui semblent importantes.

Pour ce faire, Riemann remarque que la définition des coefficients de Fourier dépend de l'intégrabilité de la fonction. Aussi, pour aller au-delà de ce qu'avait fait Dirichlet, est-il obligé de définir une intégrale définie plus générale, ce que nous appelons aujourd'hui l'intégrale de Riemann.

À la question posée par Riemann s'ajoute le problème de l'unicité de la représentation d'une fonction par une série trigonométrique. Influencé par Riemann, Georg Cantor énoncera en 1870 le théorème d'unicité suivant: si $f(x) = \frac{a_0}{2} + \Sigma\, (a_i \cos(ix) + b_i \sin(ix))$ est convergente quel que soit $x \in R$, alors les coefficients a_i et b_i sont déterminés par f de façon unique.[22] L'année suivante, il affaiblit ses hypothèse en montrant que le théorème tient encore lorsque, dans un intervalle borné, il y a un nombre fini de points pour lesquels la série ne converge pas ou encore $f(x) = 0$. C'est en voulant affaiblir davantage cette condition que Cantor développe sa théorie des ensembles.[23]

Je ne peux terminer cette chronique sans remercier l'A.M.Q. pour le prix Roland Brossard qui m'a été attribué cette année. Que ce soient les lecteurs du Bulletin, donc vous qui me lisez maintenant, qui aient ainsi manifesté leur intérêt pour les quelques lignes de cette chronique, ça m'a fait chaud au cœur.

Merci.

19 Citation de Riemann, B., 1854, Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique, dans *Oeuvres mathématiques de Riemann*, trad. L. Laugel, Paris 1898, p. 237. Le mémoire de Riemann débute par un très beau survol de l'histoire de la représentation des fonctions arbitraires par des séries trigonométriques. Pour plus d'informations sur le mémoire de Dirichlet, voir Dugac, P. 1981, Des fonctions comme expressions analytiques aux fonctions représentables analytiquement, dans Dauben, J. W. (éd.), 1981, *Mathematical Perspectives*, Academic Press, pp. 20-21.

20 Riemann, 1854, p. 237.

21 Ibid, p. 238.

22 Dugac, P. 1978, p. 376.

23 Ibid, pp. 377-381. La théorie des ensembles n'est pas l'œuvre uniquement de Cantor. Pour voir le rôle de Dedekind et de bien d'autres, voir Dugnac, 1981, pp. 26 à 29. Un article intéressant sur l'histoire de la notion de fonction est celui de Monna, A. F., 1972, The Concept of Function in the 19th and 20th Centuries, in Particular with Regard to the Discussions between Baire, Borel and Lebesque, *Archives for the History of Exact Sciences*, vol. 9, nº 1, pp. 57 à 84.