LES ŒUVRES D'EUCLIDE,

TRADUITES LITTÉRALEMENT

D'APRÈS UN MANUSCRIT GREC TRÈS-ANCIEN, RESTÉ INCONNU JUSQU'A NOS JOURS.

PAR F. PEYRARD,

TRADUCTEUR DES ŒUVRES D'ARCHIMÈDE.

OUVRAGE DÉDIÉ AU ROI.

A PARIS,

Chez C.-F. PATRIS, Imprimeur-Libraire, rue de la Colombe, N° 4, en la Cité.

1819.

LE PREMIER LIVRE
DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

1. Le point est ce dont la partie est nulle.

2. Une ligne est une longueur sans largeur.

3. Les extrémités d'une ligne sont des points.

4. La ligne droite est celle qui est également placée entre ses points.

5. Une surface est ce qui a seulement longueur et largeur.

6. Les extrémités d'une surface sont des lignes.

7. La surface plane est celle qui est également placée entre ses droites.

8. Un angle plan est l'inclinaison mutuelle de deux lignes qui se touchent dans un plan, et qui ne sont point placées dans la même direction.

9. Lorsque les lignes, qui comprennent ledit angle, sont des droites, l'angle se nomme rectiligne.

10. Lorsqu'une droite tombant sur une droite fait deux angles de suite égaux entre eux, chacun des angles égaux est droit; et la droite placée au-dessus est dite perpendiculaire à celle sur laquelle elle est placée.

11. L'angle obtus est celui qui est plus grand qu'un droit.

12. L'angle aigu est celui qui est plus petit qu'un droit.

13. On appèle limite ce qui est l'extrémité de quelque chose.

14. Une figure est ce qui est compris par une seule ou par plusieurs limites.

15. Un cercle est une figure plane, comprise par une seule ligne qu'on nomme circonférence; toutes les droites, menées à la circonférence d'un des points placés dans cette figure, étant égales entre elles.

16. Ce point se nomme le centre du cercle.

17. Le diamètre du cercle est une droite menée par le centre, et terminée de part et d'autre par la circonférence du cercle : le diamètre partage le cercle en deux parties égales.

18. Un demi-cercle est la figure comprise par le diamètre, et la portion de la circonférence, soutendue par le diamètre.

19. Un segment de cercle est la figure comprise par une droite et par la circonférence du cercle ; le demi-cercle étant plus grand ou plus petit que le segment.

20. Les figures rectilignes sont celles qui sont terminées par des droites.

21. Les figures trilatères sont terminées par trois droites.

22. Les quadrilatères, par quatre.

23. Les multilatères, par plus de quatre.

24. Parmi les figures trilatères, le triangle équilatéral est celle qui a ses trois côtés égaux.

25. Le triangle isocèle, celle qui a seulement deux côtés égaux.

26. Le triangle scalène, celle qui a ses trois côtés inégaux.

27. De plus, parmi les figures trilatères, le triangle rectangle est celle qui a un angle droit.

28. Le triangle obtusangle, celle qui a un angle obtus.

29. Le triangle acutangle, celle qui a ses trois angles aigus.

30. Parmi les figures quadrilatères, le quarré est celle qui est équilatérale et rectangulaire.

31. Le rectangle, celle qui est rectangulaire, et non équilatérale.

32. Le rhombe, celle qui est équilatérale, et non rectangulaire.

33. Le rhomboïde, celle qui a ses côtés et ses angles opposés égaux entre eux, et qui n'est ni équilatérale ni rectangulaire.

34. Les autres quadrilatères, ceux-là exceptés, se nomment trapèzes.

35. Les parallèles sont des droites, qui, étant situées dans un même plan, et étant prolongées à l'infini de part et d'autre, ne se rencontrent ni d'un côté ni de l'autre.

DEMANDES.

1. Conduire une droite d'un point quelconque à un point quelconque.

2. Prolonger indéfiniment, selon sa direction, une droite finie.

3. D'un point quelconque, et avec un intervalle quelconque, décrire une circonférence de cercle.

4. Tous les angles droits sont égaux entre eux.

5. Si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.

6. Deux droites ne renferment point un espace.

NOTIONS COMMUNES.

1. Les grandeurs égales à une même grandeur, sont égales entre elles.
2. Si à des grandeurs égales, on ajoute des grandeurs égales, les touts seront égaux.
3. Si de grandeurs égales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront égaux.
4. Si à des grandeurs inégales, on ajoute des grandeurs égales, les touts seront inégaux.
5. Si de grandeurs inégales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront inégaux.
6. Les grandeurs, qui sont doubles d'une même grandeur, sont égales entre elles.
7. Les grandeurs, qui sont les moitiés d'une même grandeur, sont égales entre elles.
8. Les grandeurs, qui s'adaptent entre elles, sont égales entre elles.
9. Le tout est plus grand que la partie.

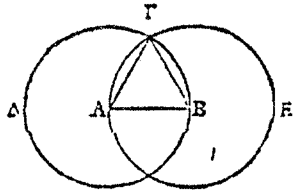
PROPOSITION PREMIÈRE.

Sur une droite donnée et finie, construire un triangle équilatéral.

Exposition. Soit AB une droite donnée et finie.

Détermination. Il faut construire sur la droite finie AB un triangle équilatéral.

Construction. Du centre A et de l'intervalle AB, décrivons la circonférence BΓΔ (dem. 3); et de plus, du centre B et de l'intervalle BA, décrivons la circonférence AΓE; et du point Γ, où les circonférences se coupent mutuellement, conduisons aux points A, B les droites ΓA, ΓB (dem. 1).



Démonstration. Car, puisque le point A est le centre du cercle BΓΔ, la droite AΓ est égale à la droite AB (déf. 15); de plus, puisque le point B est le centre du cercle AΓE, la droite BΓ est égale à la droite BA; mais on a démontré

LE CINQUIÈME LIVRE

DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

1. Une grandeur est partie d'une grandeur, la plus petite de la plus grande, quand la plus petite mesure la plus grande.

2. Une grandeur plus grande est multiple d'une grandeur plus petite, quand la plus grande est mesurée par la plus petite.

3. Une raison, est certaine manière d'être de deux grandeurs homogènes entr'elles, suivant la quantité.

4. Une proportion est une identité de raisons.

5. Des grandeurs sont dites avoir une raison entr'elles, lorsque ces grandeurs, étant multipliées, peuvent se surpasser mutuellement.

6. Des grandeurs sont dites être en même raison, la première à la seconde, et la troisième à la quatrième, lorsque des équimultiples quelconques de la première et de la troisième, et d'autres équimultiples quelconques de la seconde et de la quatrième sont tels, que les premiers équimultiples surpassent, chacun à chacun, les seconds équimultiples, ou leur sont égaux à la fois, ou plus petits à la fois.

7. Les grandeurs qui ont la même raison sont dites proportionnelles.

8. Lorsque, parmi ces équimultiples, un multiple de la première surpasse un multiple de la seconde, et qu'un multiple de la troisième ne surpasse pas un multiple de la quatrième, on dit alors que la première a avec la seconde une plus grande raison que la troisième avec la quatrième.

9. Une proportion a au moins trois termes.

10. Lorsque trois grandeurs sont proportionnelles, la première est dite avoir avec la troisième une raison double de celle qu'elle a avec la seconde.

11. Lorsque quatre grandeurs sont proportionnelles, la première est dite avoir avec la quatrième une raison triple de celle qu'elle a avec la seconde, et ainsi de suite, tant que la proportion subsiste.

12. Les antécédents sont dits des grandeurs homologues aux antécédents; et les conséquents, des grandeurs homologues aux conséquents.

13. La raison est alterne, quand on compare l'antécédent à l'antécédent, et le conséquent au conséquent.

14. La raison est inverse, quand on compare le conséquent comme antécédent à l'antécédent comme conséquent.

15. Il y a composition de raison, quand on compare au conséquent l'antécédent avec le conséquent.

16. Il y a division de raison, quand on compare au conséquent l'excès de l'antécédent sur le conséquent.

17. Il y a conversion de raison, quand on compare l'antécédent à l'excès de l'antécédent sur le conséquent.

18. Il y a raison par égalité, lorsqu'ayant plusieurs grandeurs, et d'autres grandeurs égales en nombre aux premières, et que ces grandeurs étant prises deux à deux, et en même raison, la première grandeur des premières est à la dernière, comme la première grandeur des secondes est à la dernière; ou bien, lorsque l'on compare les grandeurs extrêmes, les moyennes étant retranchées.

19. La proportion est ordonnée, lorsque l'antécédent est au conséquent comme l'antécédent est au conséquent, et que le conséquent est à un autre conséquent quelconque, comme le conséquent est à un autre conséquent quelconque.

20. La proportion est troublée, lorsqu'ayant trois grandeurs et d'autres grandeurs égales en nombre aux premières, il arrive que dans les premières grandeurs l'antécédent est au conséquent, comme dans les secondes grandeurs l'antécédent est au conséquent, et que dans les premières grandeurs le conséquent est à une grandeur quelconque, comme dans les secondes grandeurs une grandeur quelconque est à un antécédent.

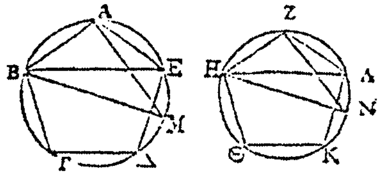
LE DOUZIÈME LIVRE

DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

PROPOSITION I.

Les polygones semblables inscrits dans des cercles sont entr'eux comme les quarrés des diamètres.

Soient les cercles ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ; soient dans ces cercles les polygones semblables ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, et que les diamètres de ces cercles soient ΒΜ, ΗΝ; je dis que le quarré de ΒΜ est au quarré de ΗΝ comme le polygone ΑΒΓΔΕ est au polygone ΖΗΘΚΛ.

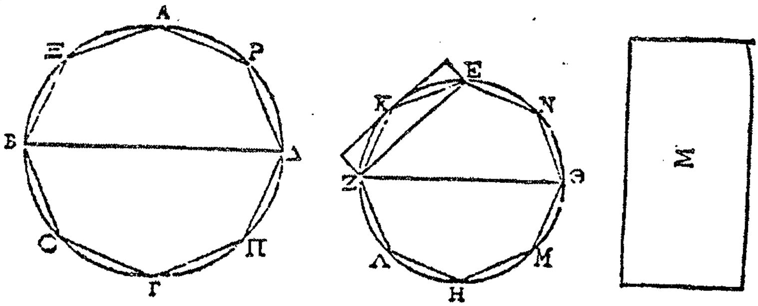


Car joignons ΒΕ, ΑΜ, ΗΛ, ΖΝ. Puisque le polygone ΑΒΓΔΕ est semblable au polygone ΖΗΘΚΛ, que l'angle ΒΑΕ est égal à l'angle ΗΖΛ (déf. 1. 6), et que ΒΑ est à ΑΕ comme ΗΖ est à ΖΛ, les deux triangles ΒΑΕ, ΗΖΛ ont un angle égal à un angle; savoir, l'angle ΒΑΕ égal à l'angle ΗΖΛ, et les côtés, placés autour de ces angles, proportionnels; les triangles ΑΒΕ, ΖΗΛ sont donc équiangles (6. 6); l'angle ΑΕΒ est donc égal à l'angle ΖΛΗ. Mais l'angle ΑΕΒ est égal à l'angle ΑΜΒ (21. 3), car ces angles sont appuyés sur le même arc, et l'angle ΖΛΗ est aussi égal à l'angle ΖΝΗ; l'angle ΑΜΒ est donc égal à l'angle ΖΝΗ. Mais l'angle droit ΒΑΜ est égal à l'angle droit ΗΖΝ (31. 3); l'angle restant est donc égal à l'angle restant; les deux triangles ΑΒΜ, ΖΗΝ sont donc équiangles; ΒΜ est donc à ΗΝ comme ΒΑ est à ΗΖ (4. 6). Mais la raison du quarré de ΒΜ au quarré de ΗΝ est double de la raison ΒΜ à ΗΝ (20. 6), et la raison du polygone ΑΒΓΔΕ au polygone ΖΗΘΚΛ est double de la raison de ΒΑ à ΗΖ; le quarré de ΒΜ est donc au quarré de ΗΝ comme le polygone ΑΒΓΔΕ est au polygone ΖΗΘΚΛ (11. 5). Donc, etc.

PROPOSITION II.

Les cercles sont entr'eux comme les quarrés de leurs diamètres.

Soient les cercles ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, et que leurs diamètres soient ΒΔ, ΖΘ; je dis que le quarré de ΒΔ est au quarré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est au cercle ΕΖΗΘ.



Car si le quarré de ΒΔ n'est pas au quarré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est au cercle ΕΖΗΘ, le quarré ΒΔ sera au quarré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est à une surface plus grande ou à une surface plus petite que le cercle ΕΖΗΘ. Que ce soit d'abord à une surface Σ plus petite. Dans le cercle ΕΖΗΘ décrivons le quarré ΕΖΗΘ; le quarré décrit sera plus grand que la moitié du cercle ΕΖΗΘ, parce que, si par les points Ε, Ζ, Η, Θ nous menons des tangentes à ce cercle, le quarré ΕΖΗΘ sera la moitié du quarré circonscrit au cercle (47. 11 et 31. 3). Mais le cercle est plus petit que le quarré circonscrit; le quarré inscrit ΕΖΗΘ est donc plus grand que la moitié du cercle ΕΖΗΘ. Partageons les arcs ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ en deux parties égales aux points Κ, Λ, Μ, Ν, et joignons ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ. Chacun des triangles ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΜΗΘ, ΘΝΕ est donc plus grand que la moitié du segment dans lequel il est placé; parce que si par les points Κ, Λ, Μ, Ν nous menons des tangentes au cercle, et si sur les droites ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ nous construisons des parallélogrammes, chacun des triangles ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ sera la moitié du parallélogramme dans lequel il est placé (37. 1). Mais un segment est plus petit que le parallélogramme où il est placé; chacun des triangles ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ est donc plus grand que la moitié du segment dans lequel il est placé. Si nous partageons les arcs restants en deux parties égales; si nous joignons leurs extrémités par des droites, et si nous continuons toujours de faire la même chose, il nous restera certains segments de cercles dont la somme sera moindre que l'excès du cercle ΕΖΗΘ sur la surface Σ; car nous avons démontré dans le premier théorème du dixième livre que, deux grandeurs inégales étant données, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on continue toujours de faire la même chose, il reste enfin une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs exposées. Qu'on ait ce reste, et que ce soient les segments du cercle ΕΖΗΘ placés sur les droites ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ, et qu'ils soient plus petits que l'excès du cercle ΕΖΗΘ sur la surface Σ; le polygone restant ΕΚΖΛΗΜΘΝ sera plus grand que la surface Σ. Décrivons dans le cercle ΑΒΓΔ un polygone ΑΞΒΟΓΠΔΡ semblable au polygone ΕΚΖΛΗΜΘΝ; le quarré de ΒΔ sera au quarré de ΖΘ comme le polygone ΑΞΒΟΓΠΔΡ est au polygone ΕΚΖΛΗΜΘΝ (1. 12). Mais le quarré de ΒΔ est au quarré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est à la surface Σ; le cercle ΑΒΓΔ est donc à la surface Σ comme le polygone ΑΞΒΟΓΠΔΡ est au polygone ΕΚΖΛΗΜΘΝ; donc, par permutation, le cercle ΑΒΓΔ est au polygone qui lui est inscrit comme la surface Σ est au polygone ΕΚΖΛΗΜΘΝ. Mais le cercle ΑΒΓΔ est plus grand que le polygone qui lui est inscrit; la surface Σ est donc plus grande que le polygone ΕΚΖΛΗΜΘΝ. Mais il est aussi plus petit, ce qui est impossible; le quarré de ΒΔ n'est donc point au quarré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est à une surface plus petite que le cercle ΕΖΗΘ. Nous démontrerons semblablement que le quarré de ΖΘ n'est point au quarré de ΒΔ comme le cercle ΕΖΗΘ est à une surface plus petite que le cercle ΑΒΓΔ. Je dis ensuite que le quarré de ΒΔ n'est point au quarré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est à une surface plus grande que le cercle ΕΖΗΘ. Car si cela est possible, que le quarré de ΒΔ soit au quarré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est à une surface Σ plus grande. Par inversion, le quarré de ΖΘ sera au quarré de ΒΔ comme la surface Σ est au cercle ΑΒΓΔ. Mais la surface Σ est au cercle ΑΒΓΔ comme le cercle ΕΖΗΘ est à une surface plus petite que le cercle ΑΒΓΔ; le quarré de ΖΘ est donc au quarré de ΒΔ comme le cercle ΕΖΗΘ est à une surface plus petite que le cercle ΑΒΓΔ, ce qui a été démontré impossible; le quarré de ΒΔ n'est donc pas au quarré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est à une surface plus grande que le cercle ΕΖΗΘ. Mais on a démontré que le quarré de ΒΔ n'est point au quarré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est à une surface plus petite que le cercle ΕΖΗΘ; le quarré de ΒΔ est donc au quarré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est au cercle ΕΖΗΘ. Donc, etc.