Louis Charbonneau

Les opérations arithmétiques
Quelques exemples historiques

(version préliminaires encore incomplète)

Des abaques au papier

L'histoire des algorithmes écrits des opérations arithmétiques est, il va sans dire, fortement ancrée dans celle des numérations écrites. Néanmoins, elles ne se confondent pas. Ainsi, comme nous l'avons vu dans la section traitant des numérations, les marchands, au Moyen Âge, exécutent leurs calculs essentiellement à l'aide de tables à calculer. On écrit les résultats en utilisant la numération latine.[1] Cela aurait pu être écrit avec la numération maya que l'usage de la table à calculer n'en aurait pas été affecté.

La table à calculer remonte au moins aux Grecs de l'époque classique (v. -600). Dans l'Antiquité, la table où s'effectuaient les calculs était divisée par des segments de droites verticaux. Un caillou dans la première colonne indique une unité. Un dans la seconde vaut cinq, un dans la troisième, dix, un dans la quatrième, cinquante, et ainsi de suite. Dans un tel abaque, le passage d'une ligne à l'autre se fait avec de petits nombres de jetons. Ainsi, lorsqu'il y a cinq jetons dans la première colonne à droit, on les transforme en un jeton de la seconde colonne, et lorsqu'il y a deux jetons dans la deuxième colonne, on les remplace par un jeton dans la troisième colonne, et ainsi de suite.

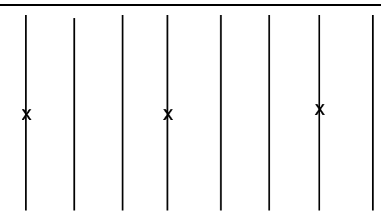


fig. 1

Étymologie
Le mot **abaque** vient du grec *abakion*, lui-même dérivé du mot *abax* qui signifie plateau rond ou coupe sans pied. (Menninger, p. 301.) On conçoit dès lors que les premiers abaques avaient une surface plane, pouvant être une table ou un genre de plateau.

Après la chute de l'Empire romain d'Occident (476), l'usage de la table à calculer en Europe semble avoir progressivement plus ou moins disparu jusqu'au tournant du millénaire lorsque Gerbert en modifia l'usage en substituant ses *apices* aux pierres ou jetons. (Voir la section sur les numérations) Comme nous l'avons dit, l'usage de l'abaque de Gerbert se limita principalement aux monastères, et ce jusqu'au XIIe siècle. À tel point que le mot *abacista* fut remplacé durant cette période par *Gerbertista.* Dans les activités commerciales, la table à calculer revint en usage au XIIIe siècle, mais sous une forme légèrement modifiée. En effet, on ne sait pas pour quelle raison, au lieu d'être placées verticalement, les lignes étaient tracées horizontalement, comme on peut le voir dans l'illustration à la fin de la section sur la numération. Par ailleurs, le cinq joue toujours son rôle de base intermédiaire. Ainsi, le nombre 3507 s'écrie comme illustré à la figure 2. L'on peut dès lors concevoir que le passage de la table à calculer au calcul avec la numération arabe impliquait un saut important, ne serait-ce que par l'abandon de cette base intermédiaire. (Pour le calcul effectif avec l'abaque, voir Menninger pp. 349 à 362.)

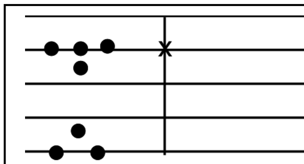


fig. 2
3507

En plus de la table à calculer dont on vient de parler, la table au sable était aussi employée par les Grecs et la Romains, ainsi que par les Indiens et les Arabes. Il s'agit d'une surface plane, table ou tablette avec des rebors, sur laquelle on étendait du sable ou de la poussière [?]. Elle se montre particulièrement utile pour le calcul avec les nombres indo-arabes du fait qu'il est facile, tout au long du calcul, d'effacer un chiffre pour réécrire immédiatement un autre à sa place. On

[1] En fait, il s'agit d'une version épurée de la numération utilisée par les Romains de l'Antiquité. Le nombre de symboles est réduit. Ceux-ci sont vraiment des lettres (I ou i, V, X, D, C) alors que les Romains employaient aussi des symboles non alphabétiques (CI pour représenter cinq cents par exemple). De plus, pour un même nombre, les Romains pouvaient utiliser plusieurs symboles différents. Pour distinguer entre la numération romaine et celle employée au Moyen Âge en Europe, nous parlons la numération latine pour désigner cette dernière.

perd trace du détail de ses calculs, mais, par ailleurs, on peut opérer rapidement. De plus, à l'époque où le papier est cher, l'usage de la table au sable permet une bonne économie. Nous verrons plus loin que l'usage de tables au sable a influencé la mise au point de certains types d'algorithmes dans lesquels, au lieu d'effacer un chiffre, on le barre d'un trait et on le remplace par un autre chiffre placé immédiatement au-dessus ou au-dessous du chiffre nouvellement barré.

(Le calcul avec les doigts : digiti 1 à 9, articuli, multiples de 10, autres : numeri composit. Swetz. P. 179.)

Le passage de la numération latine à la numération indo-arabe s'est révélé difficile. Il est d'ailleurs intéressant de remarquer que pour les auteurs de la fin du Moyen Âge et de la Renaissance, donc des XVe et XVIe siècles, il n'y a pas seulement quatre opérations. Dans le premier livre d'arithmétique imprimé, *Trevista Arithmetica*, publié en 1478, l'auteur anonyme considère cinq opérations : la numération, l'addition, la soustraction, la multiplication et la division. D'autres auteurs en ajoutent d'autres comme la duplication, la médiation, l'extraction de racine carrée ou de racine cubique. Le fait de considérer la numération au même titre que les autres peut surprendre. Toutefois, il faut se rappeler qu'à l'époque, l'une des grandes difficultés pédagogique rencontrée est justement le passage d'une numération qui ne servait qu'à écrire les nombres, la numération latine, à une numération beaucoup plus sophistiquée, la numération arabe, reposant sur le principe de la positionnalité. Le travail d'écrire des nombres dans cette dernière numération comporte des actions à faire dans un certain ordre et, de ce fait, était ainsi assimilé aux actions à faire pour effectuer les calculs arithmétiques.

Les sources

Les historiens des mathématiques se sont intéressés à l'histoire des algorithmes des opérations arithmétiques élémentaires. Pour comprendre l'évolution de ceux-ci, ils se sont plongés dans les anciens manuscrits pour y voir comment à diverses époques on calculait effectivement. Toutefois, même si nous avons de très nombreux exemples, il n'en reste pas moins très difficile de préciser la filiation réelle entre différents auteurs, d'une part parce qu'à l'époque la grande majorité des auteurs ne citaient pas leurs sources, et d'autre part parce que le périple des algorithmes, de l'Inde au monde arabe puis vers l'Europe, est complexe.

Disons donc simplement qu'à la fin du Moyen Âge et à la Renaissance, une foule d'algorithmes luttaient pour se faire une place dans le monde des marchands. Nous pouvons trouver des traces de la grande majorité d'entre elles en Inde vers le VIIe siècle et chez les Arabes entre les IXe et XIIe siècles. Puisque notre but n'est pas de faire une histoire détaillée des algorithmes mais bien de pouvoir associer des références historiques à certains algorithmes, qui présentent éventuellement un intérêt pour les élèves, nous nous limiterons à quelques mathématiciens auxquels nous nous référerons principalement. Ils ont été choisis en fonction du nombre d'exemples qui proviennent de leurs œuvres, et de la diversité de leur provenance. Mais, ATTENTION, il ne faut pas déduire de ce choix que ces personnages sont les seuls intéressants. En fait, il y en a beaucoup d'autres, surtout aux XVe et XVIIe siècles.

Gerbert d'Aurillac (v. 945, 1003), France - Europe

Gerbert d'Aurillac, né en France vers 945 et décédé en 1003, est connu comme le pape de l'an Mil. En effet, il a été nommé pape en 999 et pris alors le nom de Sylvestre II. Toutefois, avant de devenir un haut dignitaire de l'Église, il avait été au service de Borrell, comte de Barcelone. Or, à l'époque, la péninsule Ibérique était en grande partie sous la domination des Arabes et, de ce fait, commençait à être un lieu de contact entre l'Europe, pauvre et intellectuellement peu active, et le monde arabe, riche et curieux de toute chose de l'esprit. Gerbert, l'un des esprits les plus alertes de son temps, compléta sa formation Santa Mar'a de Ripoll, sous la supervision de l'évêque Atto de Vich, reconnu alors pour la qualité de son enseignement en arithmétique, géométrie, musique et astronomie (ce qu'à l'époque on appelait le Quadrivium). Mais à Rippoll, l'enseignement était enrichi de ce que les Arabes avaient développé en sciences. Aussi, Gerbert connut-il la numération arabe. Il l'introduisit par la suite les chiffres arabes en Europe. Toutefois, l'usage qu'il fit de ces chiffres se limita à la table à calculer. Il proposa de remplacer les cailloux qui servaient alors avec les tables à calculer par des jetons sur lesquels était inscrit un chiffre arabe. Cette modification reçue un accueil glacial de la part des marchands. Elle fut rapidement oubliée, sauf dans les écoles monastiques où on l'enseignait, mais davantage dans le cadre de la philosophie que de l'arithmétique.[2] Gerbert écrivit aussi d'autres ouvrages scientifiques, sur d'autres questions d'arithmétiques, en géométrie et sur l'astrolabe. **C'est dans l'un d'eux qu'il décrit le « bâton de Gerbert », un instrument par ailleurs en usage à cette époque.** À sa mort,

Bibliographie : Smith, I, pp. 195-196 ;

Sur le Web :
Article Sylvester II, Encyclopedia Britannica :
http://www.britannica.com/bcom/eb/article/3/0,5716,72543+1+70706,00.html
Biographie tirée du Dictionnaire du Catholicisme :

[2] Un livre est consacré à cette question : *Tegulae de numerorum abaci rationibus.*

http://www-droit.u-clermont1.fr/Recherche/CentresRecherche/Histoire/gerhma/GerbertdAurillac.htm

Bhaskara (1114 – v. 1185) Inde

Nous connaissons fort peu de chose à propos de la vie de Bhaskara, aussi appelé Bhaskaracarya, Bhaskara l'érudit. Il a passé l'essentiel de sa vie à Ujjain, une ville du centre de l'Inde, dans l'état de Gwalior[3], où il a dirigé un important centre d'observations astronomiques vieux de plusieurs centaines d'années. Son œuvre la plus célèbre s'intitule *Lilavati* (La belle). À en croire son traducteur perse Fyzi, XVIe siècle, c'était là le nom de la fille de Bhaskara. Cette dernière, malgré les efforts de son père, n'aurait pu contrer son horoscope qui lui prédisait qu'elle ne se marierait jamais. Afin de la consoler, le célèbre mathématicien aurait écrit ce livre pour que le nom de sa fille soit remémoré, car « un bon nom est une seconde vie et la base d'une vie éternelle. » (Smith. II, p. 277. Ma traduction.) Ce livre traite d'arithmétique élémentaire, des règles de base de l'arithmétique commerciale, de l'arpentage et de la mesure ainsi que d'un peu d'algèbre.

Bhaskara a écrit d'autres livres. Entre autres sur l'algèbre, le *Bija Ganita,* et l'astronomie et les figures sphériques, le *Siddhanta Siramani*.

Bibliographie : Smith, I, pp. 275 à 281.

Article Bhaskara de l'Encyclopedia Britannica :
http://britannica.com/bcom/eb/article/7/0,5716,81187+1,00.html

Copie de deux pages du Lilavati :
http://www.ucl.ac.uk/~ucgadkw/bhaskara-lilavati.html

Traduction anglaise du Lilavati :
http://www.brown.edu/Departments/History_Mathematics/lila/lilavati_eightops.html

Maximus Planude (1260, v. 1310) Byzance

Moine byzantin dont la renommée provient de ses traductions en grecs d'œuvres classiques latines en philosophie et en littérature et d'œuvres mathématiques arabes. Dans son *Psephophoria kat' indous (Arithmétique à la manière des Indiens*[4]), il favorise l'usage de la numération arabe, incluant le zéro, et des algorithmes d'opérations élémentaires qui s'y rattachent.

À l'époque de Planude, l'empire byzantin, n'est plus l'ombre de ce qu'elle a été lors de la division de l'Empire romain neuf cents ans plus tôt. En 1204, les croisés prennent et pillent Constantinople, aujourd'hui Istanbul, la capitale de l'Empire byzantin. Ils y installent un empereur issu de la noblesse européenne. Les byzantins réussiront à rétablir une dynastie vraiment byzantine (grecque) en 1260. Planude sera envoyé à Venise en 1295-96 comme émissaire de Byzance, dans le cadre de discussion sur des questions théologiques divisant Rome, centre du catholicisme, de Constantinople, centre de l'église orthodoxe.

[3] L'on fait remonter l'origine de la numération indienne à cette région. Voir la section sur la numération.

[4] *Psephophoria*, signifie, à l'origine, conter avec des cailloux (*psephoi* : cailloux. Menn. P. 301), mais par la suite a pris le sens plus large d'arithmétique.

Article Planude dans l'Encyclopedia Britannica :
http://www.britannica.com/bcom/eb/article/2/0,5716,61852+1+60322,00.html

Baha Eddin (1547-1622) Syrie

Quelques exemples d'algorithmes

Bibliographie
Guinet, Raymond, Histoire des techniques opératoires, *Grand N*, no 14, fév. 78, pp. 53 à 64, no 15, mai 78, pp. 27 à 421, no 17, fév. 79, pp. 21 à 36.

Smith, II, pp. 88 à 144. (Source importante à laquelle tous se réfèrent)

Origine d'un mot

Retenue : Dans le cadre de notre algorithme habituel, la retenue est un chiffre qui est reporté à la colonne immédiatement à gauche de la colonne où se fait le calcul à un moment donné. Ce mot fait effectivement référence à l'activité de retenir, mémoriser, un chiffre pour pouvoir l'utiliser ultérieurement dans la suite du calcul. Dans les livres d'arithmétique arabes, indiens ou européens de la fin du Moyen Âge, les auteurs suggèrent presque toujours de retenir le chiffre à retenir plutôt que de l'écrire. La retenue conservait dans ce contexte son sens premier. C'est l'habitude d'écrire qui a transformer le sens.

• Signifie une remarque sur une difficulté à minimiser
- Signifie une note sur la disposition
➢ Signifie un commentaire comparant un algorithme au nôtre.

L'addition

L'opération d'addition ne présente en soi pas trop de difficultés. Aussi, n'y a-t-il pas beaucoup d'algorithmes vraiment différents. Les variantes proviennent du souci d'assurer que la position des différents chiffres est respectée et que les retenues soient gérées adéquatement.

Prenons l'addition des nombres suivants : 80, 327, 14, 5 et 231.

Pour Planude.

6	5	7	0
	8	0	8
3	2	7	3
	1	4	5
		5	5
2	3	1	6

Planude

- **Position :** placer les nombres dans un rectangle, collés à la deuxième ligne à droite.
- **Retenue :** Effectuer l'addition, colonne par colonne, en partant de la droite, en retenant dans sa tête le chiffre des dizaines de la somme de la colonne.
- [La colonne de droite sert à effectuer une « preuve par 9 »]
- [La somme se trouve tout en haut]

➢ Corresponds à notre algorithme, mais la retenue n'est pas écrite, mais bien mémorisée pour usage immédiat.

Pour Baha Eddin

- Position : comme souvent chez les Arabes, l'opération se fait dans un genre dans un tracé avec des colonnes bien déterminées, qui rappelle l'abaque des Romains.
- Les retenues : voyez l'exemple pour voir comment il faisait. Notez qu'il commence par la gauche.[5] Avec un abaque au sable, au lieu de barrer un chiffre, il suffirait de l'effacer et de le remplacer par le nouveau chiffre. C'est pourquoi on peut croire que cette méthode a une certaine parenté avec les méthodes utilisées avec cet abaque.

	8	0
3	2	7
	1	4
		5
2	3	1
5	4	7
6	5	

Baha Eddin

Pour Bhaskara (Lilavati) :

On aurait eu quelque chose du genre (Smith, II, p. 91)

Somme des unités	0, 7, 4, 5, 1	17
Somme des dizaines	8, 2, 1, 3	14
Somme des centaines	3, 2	5
Somme des sommes	. . . .	657

1. L'addition finale, de droite, se fait uniquement avec une retenue mentale.

La soustraction

Il n'est sans doute pas surprenant de constater que la soustraction peut se faire par un éventail d'algorithmes plus diversifié que pour l'addition. On peut voir là la conséquence de l'emprunt qui doit souvent être fait si la valeur du chiffre à soustraire est plus grande que celle du chiffre dont on soustrait.

Évitement de l'emprunt

Voici deux algorithmes qui permettent d'éviter les emprunts, en transformant l'opération à faire d'une soustraction à une addition. Le gain semble double. D'une part, plus besoin de gérer les emprunts et, d'autre part, la soustraction est remplacée par l'addition. Le prix à payer ? Connaître les compléments à dix ou à neuf.

Nous utiliserons pour les exemples la soustraction de 2872 à 6459. (Celui de Guinet)

Lilavati (Complément à 10^n)

Au lieu de faire directement la soustraction, on considère le complément 2872 à 10000. On l'additionne au nombre dont on soustrait puis on enlève le 10000 de la somme obtenue. Schématiquement :

- 10000 –2872 -> (2 à 10 : 8, 7 à 9 :2, 8 à 9 :1, 2 à 9 :7) -> 7128
- 6459 + 7128 -> 13587

[5] Il fait la somme d'une colonne et écrit la réponse en bas. Il fait la somme de la colonne suivante, vers droite, et écrit la somme en bas. Si celle-ci est plus grande que dix, il ajoute les dizaines au dernier chiffre en bas dans la colonne immédiatement à la droite. Il raie ce chiffre et écrit la somme en dessous. Que se passe-t-il si cette dernière somme est supérieure à dix ?

- 13587 – 10000 -> 3587 (qui est le nombre cherché) [On pourrait dire aussi enlever le 1 à la somme trouvée l'étape 2]

Que se passe-t-il lorsque le nombre dont on soustrait a plus de chiffres que celui qui est à soustraire ?[6]
Cet algorithme est-il effectivement plus simple que le nôtre ? [7]
Pourquoi cet algorithme fonctionne-t-il ? [8]

Ramus (Complément à 9)

Le complément à 9 sert aussi éviter les emprunts. L'idée est de se ramener à une soustraction d'un nombre contenant le plus de 9 possible. Voici une méthode telle méthode. Déterminer le complément de 6459 à 6999. Cela est facile puisqu'on n'a jamais d'emprunt. On obtient 540. On ajoute ce nombre au nombre à soustraire, ici à 2872, ce qui donne 3412. Je soustrais alors 3412 de 6999. J'obtiens 3587, qui est le nombre cherché.

Que se passe-t-il lorsque le nombre dont on soustrait a plus de chiffres que celui qui est à soustraire ?[9]
Cet algorithme est-il effectivement plus simple que le nôtre ? [10]
Pourquoi cet algorithme fonctionne-t-il ? [11]

Ramus (Évitement de l'emprunt)

Une dernière méthode, qui s'effectue de gauche à droite, consiste à littéralement éviter l'emprunt.
En voici les étapes, en rayant les chiffres à mesure qu'on les a utilisés.

1) 6 – 2 -> 4.
2) 4 – 8 étant impossible, faire 44 – 8 -> 36.
3) 5 – 7 étant impossible, faire 65 – 7 ->58.
4) 9 – 2 -> 7.

3 5
~~4~~ ~~6~~ 8 7
~~6~~ ~~4~~ ~~5~~ ~~9~~
~~2~~ ~~8~~ ~~7~~ ~~2~~
Ramus

Cette méthode exige une bonne capacité à soustraire mentalement un nombre à deux chiffre d'un nombre à un chiffre.

[6] En 3, il faut enlever 1 à l'ordre immédiatement supérieur de celui du nombre à soustraire. Dans notre exemple, enlever 10000 au nombre obtenu en 2). Faites-le avec 26459 – 2872.

[7] Les questions posées en 1) sont simples et toujours exactement les mêmes pour tout nombre à soustraire. On trouve le complément du chiffre des unités à dix, puis, pour les autres chiffres, le complément à 9.En 3), il suffit d'enlever au nombre obtenu en 2) 1 à l'ordre immédiatement supérieur à l'ordre de grandeur du nombre à soustraire. En fait, la seule opération à faire est bien l'addition.

[8] Nous voulons faire a-b, (Dans notre exemple, a est 6459 et b est 2872) où n est le nombre de chiffres dans b. L'algorithme correspond alors à : a + (10^n – b) - 10^n, nombre effectivement égal à a – b puisque d'une part on a ajouté 10^n, que l'on a soustrait pas la suite.

[9] On procéderait exactement de la même façon. Il faudrait compléter au nombre formé du premier chiffre à gauche et de 9 aux autres positions (ex. Son on a 654321, on aura, après complétion, 699999).

[10] Oui par rapport aux emprunts. Mais autrement, il est proche du nôtre lorsqu'on effectue la soustraction.

[11] Nous voulons faire a-b. Dans notre exemple, a est 6459 et b est 2872. Si c est le nombre qui ajouté à a donne un nombre composé uniquement de 9, sauf pour le premier chiffre à gauche, alors, l'algorithme correspond à (a+c) – (b+x), ce qui est bien égal à a – b.

Emprunt et retenue

Baha Eddin

La disposition est similaire à celle pour l'addition de Baha Eddin. On fait les soustractions colonne par colonne, sans tenir compte des emprunts, puis, dans un deuxième temps, on change les chiffres pour en tenir compte. Ainsi, 4 est-il devenu 3 et 6, 5.

6 2	4 8	5 7	9 2
4	6	8	7
3	5		

Baha Eddin
Soustraction

Emprunt et retenue simultanée

L'idée ici est d'ajouter dix lorsque le besoin se fait sentir pour effectuer une soustraction dans une colonne, mais de faire immédiatement une action qui annule l'effet de cet ajout. Il y plusieurs façons de faire.

$$\begin{array}{l} 6\ {}_{1}4\ {}_{1}5\ 9 \\ \underline{2_{1}8_{1}7\ 2} \\ 3\ 5\ 8\ 7 \end{array}$$

Planude et Fibonacci, Bute et ben Ezra (équilibrage)

L'idée est simple. Dès que j'ajoute un un devant un chiffre du nombre dont on soustrait, on ajoute un un au chiffre immédiatement à gauche du nombre à soustraire. L'exemple à droite donne l'idée en reprenant notre disposition actuelle, mais en plaçant de 1 toujours en paire, un en haut, un en bas, immédiatement à gauche. Planude pour sa part procédait comme l'indique l'opération suivante. La différence est placée au-dessus du plus grand nombre. Seule une retenue est indiquée.

$$\begin{array}{l} \underline{3\ 5\ 8\ 7} \\ 6\ 4\ 5\ 9 \\ 2\ 8\ 7\ 2 \\ 1\ 1 \end{array}$$

Planude

$$\begin{array}{l} 6\ 4\ 5\ 9 \\ \underline{2_{1}8_{1}7\ 2} \\ 3\ 5\ 8\ 7 \end{array}$$

J. Buteo

Une première variante, appelée la méthode autrichienne, mais dont on trouve trace chez l'abaquiste Johannes Buteo (1492-1572) repose sur la question posée à chaque colonne, allant de droite à gauche. Par exemple, pour la colonne des dizaines, on dirait « Quel nombre ajoute à 7 pour obtenir 15 ? » (On ajoute alors un 1 près du 8 pour tenir compte du dix ajouté au 5.)

Une deuxième variante, due, semble-t-il, à Rabbi Ben Ezra, consiste à ne modifier que le nombre le plus grand. Dès qu'un emprunt est nécessaire, on ajoute un 1 au chiffre concerné et l'on enlève un du chiffre immédiatement à sa droite.

$$\begin{array}{l} 5^{1}3 \\ \cancel{6}\,\cancel{4}\,{}^{1}5\ 9 \\ \underline{2\ 8\ 7\ 2} \\ 3\ 5\ 8\ 7 \end{array}$$

ben
Ezra

Multiplication

La multiplication présente des difficultés nouvelles par rapport aux deux opérations précédentes. Les algorithmes doivent prendre en compte quatre difficultés propres à la multiplication.

A- Assurer que toutes les multiplications partielles, de chiffres deux à deux, sont effectués ;
B- Disposer les chiffres de façon telle qu'ils soient placés dans les colonnes adéquates, pour tenir compte de l'ordre de grandeur, afin d'additionner ensemble les chiffres qui doivent l'être ;
C- Utilisation de la connaissance de la table de multiplication ;
D- Minimiser les calculs mentaux ou, à tout le moins, les gérer adéquatement.

(La définition de multiplication : en parler avec les fractions)

Origine de mots

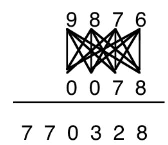
Multiplication : Vient du latin *multi-plicare*, lui-même issu d'une traduction directe du mot grec pour multiplication voulant dire plier (*plicare*) plusieurs fois (*multus*). (Smith II, p. 100, note 2)

Multiplicande : De l'adjectif verbal latin *multiplicandus* qui veut dire « qui doit être multiplié ». Dans les textes latins du Moyen Âge, pour indiquer le multiplicande, on écrivait *numerus multiplicandi*, ce qui veut dire nombre qui doit être multiplié. Par la suite, on a conservé en français que le terme francisé multiplicande, laissant tomber « nombre ». (Smith II, p. 105)

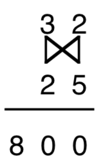
Produit : Dans un premier temps, le terme « produit » a été utilisé pour le résultat (ce qui est produit, aussi de *numerus productus*, nombre produit) obtenu après avoir effectué une opération arithmétique, pas nécessairement la multiplication. Ce n'est que tardivement (vers 1550) que le terme a été appliqué uniquement au résultat de la multiplication. (Smith, II, p. 105, Dict. hist. Robert, article Produit)

Exhiber toutes les multiplications deux à deux (Lilavati)

Une façon de mettre en évidence toutes les multiplications deux à deux des chiffres des nombres impliqués dans la multiplication consiste à montrer graphiquement toutes les combinaisons de paires de chiffres. Pour ce faire, Bhaskara propose, ayant placé les deux nombres à multiplier l'un au-dessus de l'autre, de relier les chiffres par des traits, et ce de toutes les façons possible. Cette méthode avait toutefois une lacune car toutes les additions des produits partiels successifs se faisaient mentalement. Ainsi, chez Pacioli (1494) on a la multiplication illustrée ici. On constate la complexité du treillis entre les deux nombres, sans parler du fait que tout le calcul s'est effectué mentalement. Aussi, en général, l'usage de cette méthode se limite à la multiplication de nombre à deux chiffres. Certains voient là d'ailleurs l'origine du symbole actuel de la multiplication. En effet, les imprimeurs de la Renaissance, souvent incapables de mettre tous les traits entre les deux nombres, y plaçaient simplement un x. Ce x en est venu à caractériser la multiplication. (Swetz, p. 204). Cette opinion n'est toutefois pas partagée pas tous. (Cajori, I, p.p. 262-263).



Pacioli
1494



Question : Pouvez-vous faire mentalement la multiplication des nombres à deux chiffres ? Suggestion : identifiez clairement les traits correspondant à un même ordre de grandeur du produit des deux chiffres impliqués. 2x5 donne des unités ; 3x5 et2x2 donnent des dizaines, elles doivent donc être effectuées en second, si on commence par la droite ; Enfin, 3x2 donne des centaines. On a donc la suite des opérations mentales suivantes :

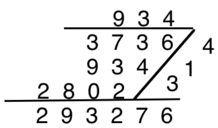
i. 2x5 donne 10, j'écris 0 et je retiens, dans ma tête, 1.
ii. 3x5 donne 15 et 2x2 donne 4 ; 15 et 4 donne 10 auquel j'ajoute le 1 que j'ai retenu. J'obtiens 20. J'écris 0 à la gauche du 0 déjà écrit et je retiens 2 dans ma tête.
iii. 3x2 donne 6, auquel j'ajoute l2 retenu. J'obtiens 8 que j'écris à la gauche du deuxième 0.

Disposer efficacement les résultats des multiplications partielles

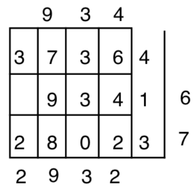
```
   3 2 4
     3 7
 -------
 2 2 6 8
 9 7 2
 -------
1 1 9 8 8
```

Notre algorithme de multiplication (voir ci-contre, où je n'ai pas indiqué de retenues. En réalité, on écrit souvent celles-ci) a pour ancêtres des algorithmes de l'époque du Lilavati (**À Vérifier, guinet**) À la Renaissance, en Italie, cette

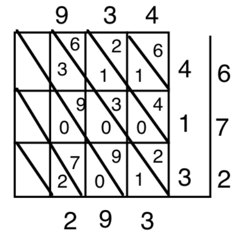
méthode portait, entre autres, le nom de *multiplicare per scechiero*, se référant à l'échiquier, qui se dit *scacchiera* en italien. Les positions des produits partiels y sont clairement indiquées par un genre de quadrillage. Les produits partiels s'effectuaient mentalement. Plusieurs méthodes sont des variantes de cette méthode. Mais elles ont toujours pour objectif d'assurer un alignement adéquat des produits partiels. Certaines visent aussi à diminuer la lourdeur des calculs mentaux à faire. Voici quelques exemples 934 x 314 (tirés de Swetz, pp. 206-207-209).
À vous maintenant de déterminer le fonctionnement de chacun de ces algorithmes. Vous



Schariero
Variante



per quadriletaro



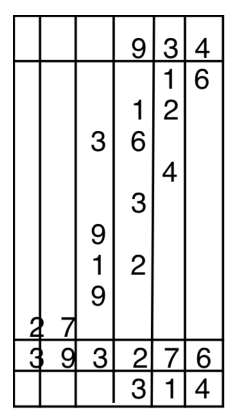
per gelosia

remarquerez que le premier facilite le déplacement progressif vers la gauche des nombres obtenus par les multiplications partielles. Dans cet algorithme, on écrit le multiplicateur de bas en haut. Pouvez-vous dire pourquoi ? Pourrait-on penser à un algorithme semblable, mais dont le multiplicateur serait écrit plutôt de bas en haut ?

Le second algorithme, *per quadriletaro*, demande que les produits partiels soient tous alignés à droite. Quel est alors l'artifice qui permet de sommer correctement ces produits partiels ? (Somme en diagonale, en descendant vers la droite, avec retenue en mémoire. Le produit final se lit de gauche à droite, en remontant à la fin.) Le nom provient clairement du « quadrilatère » dans lequel sont placés les produits partiels. Pourquoi écrit-on le nombre 314 de bas en haut ? Quelles seraient les conséquences si on écrivait le multiplicateur de haut en bas ?

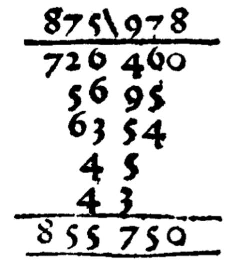
Le troisième algorithme, *per gelosia*, correspond essentiellement à la multiplication *per quadriletaro*, mais avec, clairement explicité, chacun des produits partiels des multiplications de chiffres deux à deux. Somme en diagonale, toujours avec la retenue non écrite. Lecture du produit final, de gauche à droite, en remontant à la fin. Le choix du nom *per gelosia* pour cet algorithme a été expliqué par Pacioli. Ce terme rappelle les « jalousies », un treillis de lattes de bois qui, placés dans les fenêtres des maisons de la noblesse et de la grande bourgeoisie de Venise, permettaient aux dames de regarder les passant sans être elles-mêmes vues. Pourquoi ce terme « jalousie » ? Peut-être parce que les dames nobles ne pouvant circuler librement, elle devenait jalouse de la liberté des autres. (Swetz, pp. 208-209, Smith, II, pp. 116-117).

Dès l'an mil, Gerbert avait proposé un algorithme qui, effectué sur son abaque à apices, permet de limiter les sommes partielles en cours d'opération. Pour l'exemple ci-dessous, le calcul aurait été fait ainsi. Notez l'absence de zéro, que Gerbert n'utilisait pas.



Gerbert

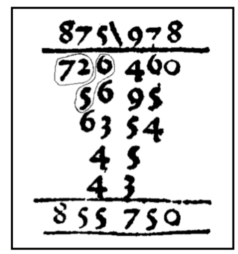
Algorithmes artistiques



Per copa
1556

Plusieurs autres algorithmes existent pour la multiplication. Ils sont en général plus complexes et poursuivent des objectifs qui semblent plus esthétiques que mathématiques. En effet, la disposition des chiffres mène pour eux à des silhouettes qui rappellent des objets. Ainsi en va-t-il de la multiplication appelée *per copa*, du fait que le tout ressemble à une coupe. La multiplication de 875 par 978 illustrée ici est le premier exemple de multiplication imprimé en Amérique. [12] Pouvez-vous trouvez comment elle fonctionne ? Remarquez que 8x9 fait 72, en haut à gauche, et que 8x7 fait 56, justement le nombre placé sous et à la suite de 72.

Algorithmes sans référence à la numération ni aux tables



Nous avons mentionné plus haut qu'au Moyen Âge on considérait la numération comme une opération. De fait, il y avait d'autres actions sur les nombres que l'on considérait comme une opération. L'une d'elles est la duplication, c'est-à-dire doubler un nombre. 'C'est que par la duplication, il est possible, comme le faisaient les Égyptiens, mais aussi un bon mathématicien comme Stifel ((dates)), de multiplier tout nombre par un autre en se limitant à faire des duplications. Par exemple, multiplier 81 par 57, c'est dire répéter 81, 57 fois.

1. Je prends 81, une fois.
2. Je double 81, ce qui fait 2 fois 81 -> 162.
3. Je double 162, ce qui fait 4 fois 81 -> 324.
4. Je double 324, ce qui fait 8 fois 81 -> 648
5. Je double 324, ce qui fait 16 fois 81 -> 1296.
6. Je double 648, ce qui fait 32 fois 81 -> 2592.
7. Il est inutile de doubler encore, puisque alors j'aurais 64 fois 81, alors que je ne veux répéter 81 que 57 fois.
8. Maintenant, je cherche la combinaison de duplications successives de deux (on pourrait dire des puissances de 2) qui, additionnées ensemble, donnent 57, le multiplicateur. En tâtonnant, je trouve 32, 16, 8 et 1. Le produit de 81 par 57 est donc 2392 + 1296 + 648 + 81, c'est-à-dire 4417. Les Égyptiens écrivaient cela ainsi

/	1	81
	2	162
	4	324
/	8	648
/	16	1296
/	32	2592

(Mettre cela en hiéroglyphes)

Pourrait-il arriver qu'il y ait deux façons de trouver une combinaison de puissances de 2 qui donne le multiplicateur, ici 57 ? De fait non car cette méthode est basée sur le fait que tout nombre peut nécessairement s'écrire en base 2, et ce d'une et une seule façon.

[12] Smith, II, p. 119. Tiré de *Sumario Copedioso, de Juan Diez, Mexico, 1556*

Il existe une méthode d'où le tâtonnement est éliminé. Il s'agit de la méthode russe, employé au jusqu'au début de XXe siècle en Russie. Reprenant une forme qui rappelle celle des Égyptiens, on écrit plutôt

/	57	81	Ligne 1
	28	162	Ligne 2
	14	324	Ligne 3
/	7	648	Ligne 4
/	3	1296	Ligne 5
/	1	2592	Ligne 6

Où, dans la première colonne de chiffres, on a 57 divisé successivement par 2, sans tenir compte du reste. On marque à gauche les lignes dans lesquelles les nombres de cette colonne sont impairs et l'on additionne les multiples de 81 qui sont en regard. Cette dernière somme nous donne le produit cherché. Oh là ! Mais pourquoi cela marche-t-il ?

Voici une explication. Écrivons d'abord la suite des égalités correspondant à exprimer 57 en une somme de puissances de 2, avec éventuellement un ajout de 1.

$57 = \underline{56} + 1$	Ligne 1
$= \underline{28}x2 + 1$	Ligne 2
$= 14x2^2 + 1$	Ligne 3
$= \underline{7}x2^3 + 1$	Ligne 4
$= (6+1)x2^3 + 1$	Ligne 4.1
$= 6x2^3 + 2^3 + 1$	Ligne 4.2
$= \underline{3}x2^4 + 2^3 + 1$	Ligne 5
$= (2+1)x2^4 + 2^3 + 1$	Ligne 6.1
$= 2^5 + 2^4 + 2^3 + 1$	Ligne 7

Donc $81x57 = 81x(2^5 + 2^4 + 2^3 + 1) = 81x2^5 + 81x2^4 + 81x2^3 + 81x1$. Opération globale

Dans la multiplication russe, on divise successivement par 2, en ne tenant pas compte du reste, et en écrivant, à droite, les doubles successifs de 81. Mais, dans le calcul final, on ne retient que les doubles de 81 qui sont sur une ligne où les quotients par 2 sont impairs (les lignes a, d, e et f). Or, dans le développement de 57 en puissance de 2, on remarque qu'à chacune des lignes, on retrouve les nombres de la colonne de gauche de la multiplication russe (57, 28, 14, 7, 3, « 1 »). On remarque aussi, qu'une puissance de 2 s'isole à chaque fois qu'un de ces nombres est impair (Voir les nombres soulignés), puisqu'on peut alors l'écrire sous forme d'un nombre pair plus 1. Par la suite, cette puissance n'est plus affectée par le calcul qui ne concerne alors que le terme qui contient plus qu'une fois une puissance de 2 (6 à la ligne 4.2, par exemple). Il s'ensuit que dans l'opération globale, il ne restera que des puissances de 2 correspondant aux lignes où un facteur impair est apparu. Dès lors, les termes de cette somme seront de doubles successifs de 81, doublés un nombre de fois correspondant à la puissance de 2 de cette ligne (En fait numéro de la ligne moins 1).

On peut généraliser cet argument. En effet, en développant un nombre en somme de puissance de 2, comme nous l'avons fait, il ne restera, à la fin, que les puissances correspondant à une ligne où le facteur de la plus haute puissance de 2 est impair. On peut remarque que le développement obtenu correspond à écrire ce nombre en base 2. Ainsi, $57 = (110001)_{\text{base }2}$.

Éviter les tables de multiplication

La connaissance des tables de multiplication a toujours été nécessaire à une application rapide d'un algorithme, quel qu'il soit. Toutefois, la paresse aidant, on peut vouloir réduire le nombre de multiplications qu'on doit connaître. On peut, au lieu d'apprendre tout la table 10x10, la réduire à la table 9x9, en connaissance la règle de l'ajout du 0 lorsqu'on multiplie par 10. On peut aussi, connaissant que la multiplication est commutative, réduire la table à une table triangulaire.

Mais il y une façon de réduire notre connaissance des tables à une table de 5x10. C'est ce qu'ont proposé, sous le nom de *regula pigri,* la règle des paresseux, de nombreux calculateurs des XVe et XVIe siècles[13]. La voici sous sa forme utilisant les mains. Pour multiplier deux nombres compris entre cinq et dix, associant un nombre à une des deux mains, et l'autre à l'autre, levez le nombre de doigts qu'il faut ajouter à cinq pour avoir chaque nombre. Pour connaître le produit des deux nombres, il suffit de prendre le nombre de doigts levés, ce qui donne le nombre de dizaines et d'ajouter le produit des doigts repliés. Ainsi, 9x9. Quatre doigts levés dans chaque main. Il y a donc huit dizaines (80) auxquelles j'ajoute le produit de un par un, c'est-à-dire un. Le produit de 9 par 9 est donc 81. Pourquoi cela marche-t-il ?
[Si a et b sont les deux nombres entre 5 et 10, on a la formule ab = ((a-5) + (b-5)) x10 -+ (10-a)(10-b).]

La division

Considérée de loin comme la plus difficile des opérations, la division était réservée aux plus habiles étudiants des écoles de commerces de la fin du Moyen Âge. *Dura cosa e la partita*, difficile chose est la division, lit-on souvent dans les livres italiens de cette époque. [14] D'ailleurs, habituellement, on n'enseignait la division qu'avec de petits nombres.

Les difficultés rencontrées dans le processus de la division recoupent celles de la multiplication. On retiendra en particulier :

- Disposer les chiffres de façon telle qu'ils soient placés dans les colonnes adéquates, pour tenir compte de l'ordre de grandeur, afin d'additionner ensemble les chiffres qui doivent l'être ;
- Utilisation de la connaissance de la table de multiplication.

La connaissance des tables de multiplication est particulièrement importante. Aussi, n'est-il pas surprenant que la plus ancienne méthode que nous verrons ici soit celle de Gerbert qui justement s'adresse au fond directement à cette préoccupation.

Origine de mots Quotient : de *quotiens*, en latin, qui veut dire « combien de fois ? »

Gerbert (Combien de fois un nombre est-il contenu dans un autre ?)

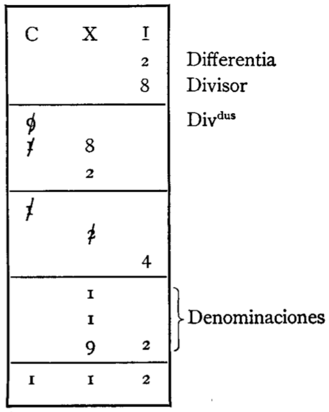
La méthode de Gerbert se réfère, comme toujours chez lui, à son abaque. Voici la division de 900 par 8.

On a clairement besoin de donner des explications. Chacune des colonnes correspond aux ordres de grandeurs indiquées au haut de la colonne. Remarquez l'usage des nombres latins pour préciser l'ordre de grandeur. Le dividende (*dividandus)* est 900, alors que le diviseur est 8. ? Afin

---

13 Smith, II, pp. 119-120.

14 Smith II, p. 132.



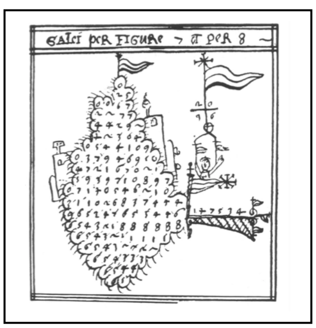
Gerbert

d'éviter des questions du style « combien de fois 8 va-t-il dans 900 ? », Gerbert va diviser par 10-2, d'où le 2 appelé *Differentia*. On peut suivre la suite de ses actions. [15]

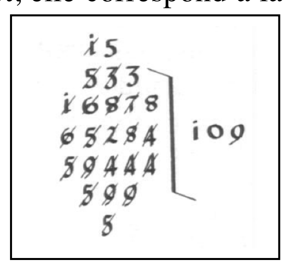
2. Combien de fois 10 va-t-il dans 900 ? 90 fois. Dix fois 90 donne 900. Je raie le 9 de la colonne des centaines. J'écris 9 en bas dans la colonne des dizaines. Mais puisque je divise par 10-2, il y a en réalité encore 90x2, 180, qu'il faut diviser par 8.
3. Combien de fois 10 va-t-il dans 180 ? 10 fois (Remarquer qu'il ne prend pas la plus grande valeur possible, mais la valeur la plus immédiatement visible). J'écris 1 en bas dans la colonne des dizaines. Je raie le 1 du 180 et j'ajoute 20 pour combler l'effet du –2 dans 10-2. La somme de 80 et 20 donne 100. Je place 1 dans la colonne des centaines.
4. Combien de fois 10 va-t-il dans 100 ? 10 fois. Je raie le 1 dans la colonne des centaines. J'écris 1 en bas dans la colonne des dizaines. Il me reste à tenir compte du 20 pour combler l'effet du –2. J'écris donc 2 dans la colonne des dizaines.
5. Combien de fois 10 va-t-il dans 20 ? Deux fois. Je raie le 2 dans la colonne des dizaines et j'écris deux en bas dans la colonne des unités. Il me reste 4, 2x2, dont je n'ai pas tenu compte.
6. Je fais la somme des nombres en bas, c'est-à-dire 90, 10, 10 et 2. J'écris la somme tout en bas, 112. La réponse est 112, reste 4.

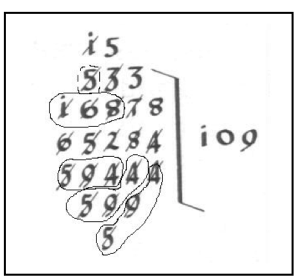
On donc que la connaissance des tables requises est réduite au minimum. Cette méthode fut utilisée jusqu'au XVIe siècle. Mais si on la fait sur papier, elle prend beaucoup de place. Elle est aussi longue à effectuer.

Per Galeo (Économiser de l'espace)



La méthode *per galeo* s'inscrit dans l'esprit de la multiplication *per copa*. Les chiffres sont placés les un près des autres pour former, à la fin, une silhouette que les professeurs de l'époque aux étudiants de décorer, habituellement comme un bateau (*galeo)*. En voici une illustration. Elle semble très compliquée. Mais ne serait-ce pas parce qu'elle implique deux grands nombres ? En effet, elle correspond à la division de, en l'occurrence, 965347655446 divisé par 6543218, ce qui donne 147534 avec un reste. Pouvez-vous le déterminer ? Voici un exemple[16] de ce même type de division, mais beaucoup plus simple. Pouvez-vous déterminer comment il fonctionne ?





Il s'agit de la division de 65284 par 594, dont la réponse est 109, reste 538. Voici une illustration qui vous aidera. Remarquez que 1 fois 594 donne 594 et que 652 – 594 donne 58. **Dans la soustraction, parler de la méthode en conséquence.**

[15] Smith, II, p. 135. Smith donne une certaine interprétation de la division que nous reproduisons ici. Toutefois, cette interprétation ne me semble pas vraiment correspondre à la logique de la méthode. Celle que je donne ici est donc différente de celle de Smith.

[16] Exemple tiré de *Trevista Arithemtica*, reproduit dans Swetz, p. 100

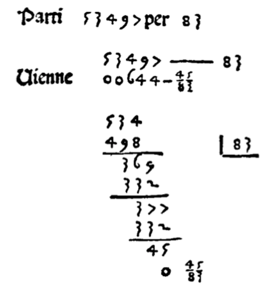
Cet algorithme de division fut l'algorithme le plus populaire jusqu'au XVIIe siècle. [17] Comme Planude le dit, elle est particulièrement facile à effectuer avec une table au sable. D'ailleurs, les Indiens, qui à l'origine de l'algorithme, l'effectuaient sur un tel abaque. [18]

[17] Swetz, p. 219. Voir la section trois pour avoir une explication de la division *per batello.*

[18] Swetz, p. 216.

A danda (Notre méthode)

On peut retracer les origines de notre algorithme de division jusqu'à Baha Eddin. Les nombres sont alors placés dans des colonnes. À la Renaissance, les colonnes ont disparu. C'est dans un livre publié en 1491, par Calandri, que, pour la première fois, elle est imprimée sous sa même forme actuelle. [19] Le terme *a danda*, en donnant, qui lui est accolée, fait référence au fait qu'après chaque étape on abaisse un chiffre pour le « donner » au reste et passer alors à l'étape suivante. Toutefois, cet algorithme délogera la division *per batello* ou *per galeo* au XVIIe siècle seulement, lorsque le prix du papier aura considérablement diminué.



Première division imprimée selon notre méthode
1491

[19] Swetz, p. 220.