Théorème de Gauss-Bonnet-Chern

Dimce Ivanovski - Julien Keller

17/07/2000

Le théorème de Gauss-Bonnet est l'un des plus célèbres théorèmes de la géométrie différentielle. Il est particulièrement stimulant d'un point de vue intellectuel car il met en relation dans le cadre d'une variété différentiable, des invariants topologiques avec des notions géométriques intrinsèques. Gauss en fit la preuve dans le cas des triangles géodésiques (1827) et en comprit l'importance pour le développement de la géomètrie moderne. La version donnée par Bonnet (1848) traitait le cas d'une variété M compacte de dimension 2, sans invoquer la puissance de la géomérie différentielle, et permettait d'obtenir la formule $\int KdA = 2\pi\chi(M)$ en considérant la théorie du degré des applications. Cet argument était repris par Heinz Hopf pour obtenir la première généralisation du théorème lorsque M est une hypersurface compacte de dimension n paire. Dans ce qui suit, nous allons présenter une preuve intrinsèque due à Chern en 1944 pour M une variété compacte, lequel s'inspira des travaux préliminaires d'Allendoerfer et de Weil. Pour cela, nous serons obligés d'aborder plusieurs "êtres" mathématiques qui trouvent leur place dans de nombreux domaines des mathématiques fondamentales, dont la géométrie riemannienne, la géométrie algébrique, la topologie algébrique, l'algèbre commutative...
Enfin, pour finir, nous donnerons des pistes vers d'autres généralisations du théorème de Gauss-Bonnet comme le théorème de Riemann-Roch et le théorème d'Atiyah-Singer en privilégiant, faute de temps, les concepts aux démarches techniques.

Nous tenons à exprimer notre gratitude à Monsieur J.M Landsberg,
qui a dirigé nos recherches dans le cadre de ce mémoire de maîtrise,
à l'Université Paul Sabatier, Toulouse III.

1 Caractéristique d'Euler

1.1 Introduction à la Cohomologie de De Rham

L'objet de cette partie est de donner quelques notions élémentaires sur la Cohomologie de de Rham, et d'introduire notamment un invariant topologique, la caratéristique d'Euler χ pour une variété compacte. Dans toute la suite, nous appellerons variété toute variété différentiable de classe C^∞.

Définition 1.1.1 *Soit X une variété. Notons $F^k(X) = \{\alpha \in \Omega^k(X) | d\alpha = 0\}$ l'espace vectoriel des formes différentielles fermées de degré k et $d\Omega^{k-1}(X)$ l'espace vectoriel des formes exactes de degré k. Alors, on appellera k-ième espace vectoriel de cohomologie de X, l'espace quotient*

$$H^k(X) = F^k(X)/d\Omega^{k-1}(X)$$

avec pour $k = 0$, $H^0(X) = F^0(X)$. Par ailleurs, si $\alpha \in F^k(X)$, son image $[\alpha]$ par l'application de passage au quotient s'appelle la classe de cohomologie de α

Exemple 1 *$H^0(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^c$ où c désigne le nombre de composantes connexes de X.*

Définition 1.1.2 *Une suite de la forme suivante*

$$E_0 \xrightarrow{f_0} E_1 \xrightarrow{f_1} E_2 ... \xrightarrow{f_{n-1}} E_n$$

d'espaces vectoriels (E_i) et d'applications linéaires est dite exacte si $\forall i\ Ker(f_i) = Im(f_{i-1})$.

Proposition 1.1 *Soit*

$$0 \to E_0 \xrightarrow{f_0} E_1 \xrightarrow{f_1} E_2 \to ... \xrightarrow{f_{n-1}} E_n \to 0$$

une suite exacte avec $dim(E_i) < \infty$. Alors on a :

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i dim(E_i) = 0$$

▶ Par récurrence. $0 \to E \to 0$ est exacte si et seulement si $E = 0$. Par ailleurs, si l'on suppose la propriété vraie au rang $n-1$, soit la suite $0 \to E_0 \xrightarrow{f_0} E_1 \to ... \xrightarrow{f_{n-1}} E_{n-1} \xrightarrow{f_n} E_n \to 0$. $Im(f_0) = Ker(f_1)$ et f_0 est injective. f_1 induit une application $f_1' : E_1/Ker(f_1) \to E_2$ injective; et ainsi la suite suivante est exacte :

$$0 \to E_1/Ker(f_1) \xrightarrow{f_1'} E_2 \to ... \xrightarrow{f_{n-1}} E_{n-1} \xrightarrow{f_n} E_n \to 0$$

Par hypothèse de récurrence, $\sum_{i=2}^{n}(-1)^i dim(E_i) + dim(E_1/Im(f_0)) = 0$. Mais $dim(E_1/f_0(E_o)) = dim(E_1) - dim(f_0(E_0)) = dim(E_1) - dim(E_0)$ par le théorème du rang. ■

Soit M une variété, U et V deux ouverts tels que $U \cup V = M$. On définit les applications linéaires :

$$r : \begin{array}{ccc} \Omega^k(M) & \to & \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \\ w & \mapsto & (w|_U, w|_V) \end{array}$$

$$s : \begin{array}{ccc} \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) & \to & \Omega^k(U \cap V) \\ (\alpha, \beta) & \mapsto & \alpha|_{U\cap V} - \beta|_{U\cap V} \end{array}$$

Lemme 1.1 *La suite :*

$$0 \to \Omega^k(M) \xrightarrow{r} \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \xrightarrow{s} \Omega^k(U \cap V) \to 0$$

est exacte.

▶ r est injective et l'on a $Im(r) = Ker(s)$ puisque deux formes sur des ouverts U et V se recollent en une sur $U \cup V$ ssi elles coincident sur $U \cap V$. Enfin, si l'on choisit une partition de l'unité sur M (ν, μ) subordonnée à (U, V) et si $\gamma \in \Omega^k(U \cap V)$, on peut définir $\alpha \in \Omega^k(U)$ par $\alpha = \mu\gamma$ sur $U \cap V$ et 0 sur $U \backslash Supp(\mu)$. De la même façon, on peut définir $\beta \in \Omega^k(V)$ à partir de -$\nu\gamma$. Dès lors, s est bien surjective. ■

On fait maintenant les remarques suivantes :

- Si $w \in \Omega^k(M)$ est fermée, c'est à dire $w \in F^k(M)$, alors les formes α et β définies $r(w) = (\alpha, \beta)$ sont toutes les deux fermées, appartenant à l'ensemble $F^k(U \cap V)$.
- Si $w \in \Omega^k(M)$ est exacte, c'est à dire $w \in d\Omega^{k-1}(M)$, alors les formes α et β définies $r(w) = (\alpha, \beta)$ sont toutes les deux exactes, appartenant à l'ensemble $d\Omega^{k-1}(U \cap V)$.
- Si $\alpha \in \Omega^k(U)$ et $\beta \in \Omega^k(V)$ sont toutes deux fermées, il en est de même par linéarité de d de $s(\alpha, \beta)$.
- Si $\alpha \in \Omega^k(U)$ et $\beta \in \Omega^k(V)$ sont toutes deux exactes, il en est de même de $s(\alpha, \beta)$.

Dès lors, on définit R et S par passage au quotient à partir de r et s, $d\Omega^{k-1}(M)$ étant un sous-groupe de $F^{k-1}(M)$ abélien et puisque $r(d\Omega^{k-1}(M)) \subset d\Omega^k(U) \oplus d\Omega^k(V)$ et $s(d\Omega^k(U) \oplus d\Omega^k(V)) \subset d(\Omega^k(U \cap V))$.

Proposition 1.2 *La suite*

$$H^k(M) \xrightarrow{R} H^k(U) \oplus H^k(V) \xrightarrow{S} H^k(U \cap V)$$

est exacte.

▶ Montrons que $Ker(S) = Im(R)$. $S \circ R = 0 \Rightarrow Im(R) \subset Ker(S)$. Si $(\alpha, \beta) \in \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V)$, et α et β sont fermées, telles que $s(\alpha, \beta) = d\gamma$, avec $\gamma \in \Omega^{k-1}(U \cap V)$, alors il existe $\omega \in \Omega^k(M)$ et $(\alpha_1, \beta_1) \in \Omega^{k-1}(U) \oplus \Omega^{k-1}(V)$ telles que $r(\omega) = (\alpha - d\alpha_1, \beta - d\beta_1)$. D'après le dernier lemme, γ peut s'écrire sous la forme $s(\alpha_1, \beta_1)$. Dès lors, ω existe puisque $\alpha - d\alpha_1$ et $\beta - d\beta_1$ ont même restriction sur $U \cap V$:

$$(\alpha - d\alpha_1) - (\beta - d\beta_1) = (\alpha - \beta) - d\gamma = 0$$

par définition de s. ■

Théorème 1 ***(Suite de Mayer-Vietoris)***
Il existe une application lineaire Λ de $H^k(U \cap V)$ dans $H^{k+1}(M)$ telle que la suite suivante soit exacte :

$$H^k(U) \oplus H^k(V) \xrightarrow{S} H^k(U \cap V) \xrightarrow{\Lambda} H^{k+1}(M) \xrightarrow{R} H^{k+1}(U) \oplus H^{k+1}(V)$$

et, en appliquant ce résultat en tout degré, on obtient la suite exacte suivante :

$$\begin{array}{lll} 0 & \to & H^0(M) \xrightarrow{R} H^0(U) \oplus H^0(V) \xrightarrow{S} H^0(U \cap V) \xrightarrow{\Lambda} H^1(M) \to ... \\ ... & \to & H^k(M) \xrightarrow{R} H^k(U) \oplus H^k(V) \xrightarrow{S} H^k(U \cap V) \xrightarrow{\Lambda} H^{k+1}(M) \to ... \end{array}$$

▶ $\forall \gamma \in F^k(U\cap V), \exists \alpha \in \Omega^k(U), \exists \beta \in \Omega^k(V)$ telles que $s(\alpha,\beta)=\gamma$ par le lemme n°1.1. Ainsi, $d\alpha|_{U\cap V} = d\beta|_{U\cap V}$ et d'après la dernière proposition, $\exists \omega \in \Omega^{k+1}(M)$ telle que $\omega|_U = d\alpha$ et $\omega|_V = d\beta$. Donc ω est fermée. Soit maintenant $(\alpha',\beta') \in \Omega^k(U)\oplus\Omega^k(V)$ tel que $s(\alpha',\beta')$ soit de la forme $\gamma + d\gamma' \in \Omega^k(U\cap V)$, ce qui est possible vue la surjectivité de l'application s. Alors, encore par le lemme, il existe $\alpha'' \in \Omega^k(U)$ et $\beta'' \in \Omega^k(V)$ telles que $d\gamma' = s(\alpha'',\beta'')$, et comme $Im(r) = Ker(s)$, on a ainsi l'existence de δ telle que :

$$\begin{aligned}\alpha' &= \alpha + \alpha'' + \delta|_U \\ \beta' &= \beta + \beta'' + \delta|_V\end{aligned}$$

Les restrictions de $d\alpha'$ et $d\beta'$ à $U\cap V$ étant les mêmes, la forme sur M définie par le couple (α',β') est $\omega + d\delta$. Comme $s(\alpha',\beta') = \gamma + d\gamma'$ et γ sont cohomologues, il y a "correspondance" entre γ et ω, et donc, on peut bien définir une application au niveau de la cohomologie comme proposé au départ entre $H^k(U\cap V)$ et $H^{k+1}(M)$ par passage au quotient. Soit Λ cette application de $H^k(U\cap V)$ dans $H^{k+1}(M)$. Prouvons maintenant l'exactitude de la suite. Bien sûr, $\Lambda\circ S = 0$ et $R\circ\Lambda = 0$. Par ailleurs, si $\Lambda[\gamma] = 0$, alors avec $\gamma = s(\alpha,\beta)$ (s surjective, $(\alpha,\beta)\in\Omega^k(U)\oplus\Omega^k(V)$), il existe $\delta \in \Omega^k(M)$ telle que

$$d\delta|_U = d\alpha$$

$$d\delta|_V = d\beta$$

et alors $\alpha - \delta$ et $\beta - \delta$ sont dans $F^k(U)$. et ainsi, $[\gamma] = S([\alpha-\beta],[\beta-\delta])$. Prouvons pour finir que $Ker(R) \subset Im(\Lambda)$. Si $R([\omega]) = 0$, $\omega|_U = d\alpha$ et $\omega|_V = d\beta$ et $(\alpha-\beta)_{|U\cap V}$ est fermée, d'où par définition de Λ, $[\omega] = \Lambda([\alpha],[\beta])$. ■

Définition 1.1.3 *Une application $f : M \to N$ de classe C^∞ est une équivalence d'homotopie s'il existe une application $g : N \to M$ de classe C^∞ telle que $g\circ f$ soit homotope à Id_M et $f\circ g$ à Id_N.*

Remarque 1 *Soient P et Q deux points de S^n distincts. Alors $S^n\backslash\{P,Q\}$ est difféomorphe à $S^{n-1}\times]-1,1[$ par*

$$(x,t) \mapsto \left(\frac{x}{\sqrt{1-t^2}}, t\right)$$

et bien sûr, $S^{n-1}\times]-1,1[\simeq \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, donc $H^k(S^n\backslash\{P,Q\}) \simeq H^k(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$. Enfin, l'inclusion l'inclusion canonique de S^{n-1} dans $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ est une équivalence d'homotopie, donc

$$H^k(S^n\backslash\{P,Q\}) = H^k(\mathbb{R}^n\backslash\{0\}) = H^k(S^{n-1})$$

Théorème 2 *Si $0 < k < n$, $H^k(S^n) = 0$ et $dim\, H^n(S^n) = 1$*

▶ Par récurrence sur n. Pour S^1, on prend deux points p et q distincts, et on pose $U = S^1\backslash\{p\}$ et $V = S^1\backslash\{q\}$. Alors U et V sont difféomorphes à $\mathbb{R}$, alors que $U\cap V$ a deux composantes connexes, dont chacune est difféomorphe à $\mathbb{R}$. La suite exacte de Mayer-Vietoris se réduit à :

$$0 \to H^0(S^1) \to H^0(U)\oplus H^0(V) \to H^0(U\cap V) \to H^1(S^1) \to 0$$

et comme $H^0(X) \simeq \mathbb{R}^c$ pour X variété à c composantes connexes, on obtient $dim\, H^1(S^1) = 1$ par la proposition n°1.
Par ailleurs, si l'on considère toujours $U = S^n \backslash \{p\}$ et $V = S^n \backslash \{q\}$ avec p et q distincts, alors, pour $k = 1$, S^n étant connexe pour $n \geq 2$,

$$0 \to H^0(S^n) \to H^0(U) \oplus H^0(V) \to H^0(U \cap V) \to H^1(S^n) \to 0$$

et là encore, de la même manière, on obtient $H^1(S^n) = 0$ si $n > 1$.
Pour $1 < k \leq n$, la suite suivante

$$H^{k-1}(U) \oplus H^{k-1}(V) \to H^{k-1}(U \cap V) \to H^k(S^n) \to H^k(U) \oplus H^k(V)$$

se réécrit sous la forme :

$$0 \to H^{k-1}(U \cap V) \to H^k(S^n) \to 0$$

puisque $H^{k-1}(U) \oplus H^{k-1}(V) = H^k(U) \oplus H^k(V) = 0$. Comme $H^{k-1}(U \cap V)$ isomorphe à $H^{k-1}(S^{n-1})$, et on obtient par l'hypothèse de récurrence, à la fois que $dim\, H^k(S^n) = 0$ pour $k < n$ et $dim\, H^n(S^n) = 1$. ■

Nous allons maintenant relier les dimensions des espaces $H^k(M)$ à un ensemble de nombres donnés par "triangulation" de M, c'est à dire par des caractéristiques géométriques intrinsèques à M.

Définition 1.1.4 *Soit $n \geq 0$, et $\Delta_n = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} | 1 \geq x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1\right\}$ le simplexe standard de dimension n. Le sous ensemble de Δ_n obtenu en prenant n-k coordonnées x_i égales à 0 est homéomorphe à Δ_k, et sera appelé une k-face de Δ_n. De la même manière, on désignera par k-face de $\Delta \subset M$ (pour Δ difféomorphe à Δ_m) toute image d'une k-face de Δ_m. On appellera triangulation de M la donnée d'un ensemble $\{\sigma_i^n(\Delta_n)\}$ tel que :*

$\sigma_i^n : \Delta_n \to M$ *est un* $C^\infty -$ *difféomorphisme*
$\bigcup\limits_i \sigma_i(\Delta_n) = M$
$\sigma_i^n(\Delta_n) \cap \sigma_j^n(\Delta_n) \neq \emptyset \Rightarrow \exists k,\ \sigma_i^n(\Delta_n) \cap \sigma_j^n(\Delta_n)$ *est une k-face de* $\sigma_i^n(\Delta_n)$ *et* $\sigma_j^n(\Delta_n)$

On admet l'existence d'une triangulation pour chaque variété C^∞.

Définition 1.1.5 *Soit M une variété de dimension n qui possède une triangulation $\{\sigma_i^n(\Delta_n)\}$. On appelle $\sigma_i^n(\Delta_n)$ un n-simplexe de la triangulation. Chaque k-face de $\sigma_i^n(\Delta_n)$ est appelée k-simplexe de la triangulation. On pose α_k le nombre de k-simplexes. Enfin, si U est la réunion de boules ouvertes disjointes 2 à 2 et qui appartiennent chacune à un n-simplexe différent $\sigma_i^n(\Delta_n)$ alors, on pose V_{n-1} le complémentaire dans M de l'ensemble formé par les centres de ces boules. Bien sûr, puisque ces centres de boules sont prises dans des n-simplexes distincts, V_{n-1} est un ouvert.*

Notons B^n la boule unité en dimension n. On a bien sûr $M = U \cup V$ avec $U \cap V_{n-1}$ qui peut être vu comme l'union disjointe de α_n copies de $\mathsf{B}^n \backslash \{0\} \simeq \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Reconsidérons maintenant la suite de Mayer-Vietoris pour $n > 2$:

$$H^{k-1}(U \cap V_{n-1}) \to H^k(M) \to H^k(U) \oplus H^k(V_{n-1}) \to H^k(U \cap V_{n-1}) \qquad (1 < k < n-1)$$

$$H^{n-2}(U\cap V_{n-1})\to H^{n-1}(M)\to H^{n-1}(U)\oplus H^{n-1}(V_{n-1})\to H^{n-1}(U\cap V_{n-1})\to H^{n}(M)\to H^{n}(U)\oplus H^{n}(V_{n-1})$$

et, ceci donne par la dernière remarque :

$$dim\, H^k(V_{n-1}) = dim\, H^k(M)$$

$$dim\, H^{n-1}(V_{n-1}) = dim\, H^{n-1}(M) - dim\, H^n(M) + \alpha_n$$

Définition 1.1.6 *Soit M une variété. On définit la caractéristique d'Euler par :*

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i dim\, H^i(M)$$

Remarque 2 *Cette définition n'a de sens que si $H^k(M)$ est de dimension finie et alors les dernières équations donnent même $\chi(M) = \chi(V_{n-1}) + (-1)^n\alpha_n$. Cette égalité permet alors de prouver par induction que*

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\alpha_i$$

Nous allons prouver que $H^k(M)$ est bien de dimension finie si M est compacte. Mais pour prouver cela, il nous faut introduire une nouvelle notion.

Définition 1.1.7 *Soit M une variété de dimension n. Un recouvrement ouvert $\{U_\alpha\}$ de M est appelé un "fin" recouvrement si toute intersection finie non vide de la forme $U_{\alpha_0}\cap\ldots\cap U_{\alpha_n}$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$. Une variété qui admet un "fin" recouvrement est dite de type fini.*

Théorème 3 *Toute variété admet un "fin" recouvrement. Si la variété est compacte, alors ce recouvrement peut être pris fini.*

▶ Soit (M, g) variété munie d'une métrique riemannienne. On sait que pour chaque point de M, il existe un voisinage U géodésique et convexe. L'intersection de 2 de ces voisinages est encore géodésique et convexe. Comme un voisinage convexe et géodésique d'une variété de dimension n est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$, on a le résultat, la dernière propriété de ce théorème résultant de la compacité de M. ■

Le but de ce qui suit est d'établir le lemme de Poincaré de façon à mieux connaître les espaces $H^k(M)$. Nous en déduirons par la suite le théorème de Dualité de Poincaré. On fait tout d'abord quelques rappels sur les champs de vecteurs.

1.2 Champs de Vecteurs et lemme de Poincaré

Définition 1.2.1 *Une section d'un fibré vectoriel $\xi := \pi : E \to M$ (c'est la notation que nous adopterons pour tout fibré) de base M est une application de classe C^∞ $s : M \to E$ telle que $\forall x \in M$, $s(x) \in E_x = \pi^{-1}(x)$ la fibre de x. On notera $\Gamma(E)$ l'ensemble des sections de E.*

Définition 1.2.2 *Un champ de vecteurs sur une variété est une section $s : M \to TM$ du fibré tangent. Localement, les champs de vecteurs sur M peuvent être identifiés aux dérivations (Cf § "Dérivations et Champs de Vecteurs") qu'ils définissent sur l'algèbre des fonctions différentiables sur M : étant donné une carte locale y de M au voisinage de a, tout champ de vecteurs sur M au voisinage de a peut s'écrire :*

$$v = v_1\partial_{y_1} + ... + v_m\partial_{y_m}$$

et les fonctions $v_i \in C^\infty(M)$ sont les coordonées du champ de vecteurs v dans la carte y. Enfin l'ensemble des champs de vecteurs sur M est noté $\Gamma(TM)$.

Définition 1.2.3 *On appelle trajectoire ou courbe intégrale d'un champ de vecteurs X sur une variété M toute courbe $t \mapsto c(t)$ de classe C^1 définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ ouvert et à valeurs dans M, et telle que :*

$$\forall t \in I \qquad c'(t) = X_{c(t)}$$

où $X_{c(t)}$ désigne la valeur de X en $c(t)$. Ainsi, si $U \subset \mathbb{R}^n$, si $X = \sum_{i=1}^n X_i\partial_i$, alors les composantes de c sont les solutions du système différentiel du premier ordre

$$\frac{dc^i}{dt} = X^i(c^1(t), ..., c^n(t))$$

et l'on peut alors appliquer les résultats classiques d'existence et d'unicité pour les systèmes différentiels.

Théorème 4 *Soit X un champ de vecteurs sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ et x un point de U. Alors il existe $I \subset \mathbb{R}$ intervalle ouvert contenant 0 et une trajectoire $c : I \to U$ de X telle que $c(0) = x$. Si $c_1 : I_1 \to U$ est une autre trajectoire ayant la même propriété, $c_{|I\cap I_1} = c_{1|I\cap I_1}$. Il existe un unique intervalle maximal de définition de c. Nous noterons c_x la trajectoire correspondante.*
Si I_x est l'intervalle de définition maximal de c_x, la réunion $\bigcup\limits_{x\in U} I_x \times \{x\}$ est un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R} \times U$ pour lequel l'application suivante est lisse :

$$(x, t) \mapsto c_x(t)$$

Définition 1.2.4 *L'application $\varphi^X : \Omega \to U$ avec $\Omega := \bigcup\limits_{x\in U} I_x \times \{x\} \subset \mathbb{R} \times U$, vérifiant*

$$\varphi_t^X(x) = c_x(t)$$

s'appelle le flot du champ de vecteurs X.

Remarque 3 *Intuitivement, si l'on pense à X comme au champ de vitesses d'un fluide remplissant U, $\varphi_t^X(x)$ nous donne la position au bout du temps t d'une particule de fluide initialement observée à la position x.*

Lemme 1.2 *Reprenons les notations du théorème n°4. Soit h une application C^∞ définie sur un ouvert de $I \times U$ contenant $\{0\} \times U$ et à valeurs dans U ouvert de $\mathbb{R}^n$ telle que*

1) $h(t, h(t', x)) = h(t + t', x)$ *lorsque les deux membres sont définis sur $I \times U$*
2) $h(0, x) = x$
3) $\frac{d}{dt}h(t, x)_{|t=0} = X_x$ *c'est à dire la valeur de X en x*

Alors $h(t, x) = \varphi_t^X(x)$ partout où h est définie.

▶ Il suffit de voir qu'on se ramène au dernier théorème avec :

$$\frac{d}{dt}h(t, x)_{|t=t_o} = \frac{d}{dt}h(t + t_o, x)_{|t=0} = \frac{d}{dt}h(t, (h(t_o, x))_{|t=0} = X_{h(t_o,x)}$$

et $h(0, x) = x$. D'où le résultat. ■

Définition 1.2.5 *Une application h satisfaisant aux conditions 1), 2) et 3) est un groupe local à un paramètre, et le champ de vecteurs*

$$X_x = \frac{d}{dt}h(t, x)_{|t=0}$$

est le générateur infinitésimal de h.

Remarque 4 *Tout ce qui a été fait depuis la définition de trajectoire peut être appliqué aux variétés, en utilisant convenablement les changements de cartes.*

Dorénavant, on désignera par la suite par A^T la transposée de l'application linéaire $A \in L(E, F)$. C'est l'application de F^* dans E^* définie par $A^T(L) = L \circ A$.

Définition 1.2.6 *Soient U, V ouverts d'espaces vectoriels, et $f \in C^\infty(U, V)$. L'image réciproque ou "pullback" par f de $\alpha \in \Omega(V) = \bigoplus_k \Omega^k(V)$ notée $f^*\alpha$ est la forme définie sur U par*

$$(f^*\alpha)_x = (d_x f)^T \cdot \alpha_{f(x)}$$

où $d_x f : T_x U \to T_{f(x)}V$ désigne l'application linéaire tangente en x de f. En particulier, si α est de degré p, alors par définition de la transposition,

$$(f^*\alpha)_x(v_1, ..., v_p) = \alpha_{f(x)}(d_x f \cdot v_1, ..., d_x f \cdot v_p)$$

On remarque aussi que si $\alpha = d\beta$, alors clairement, $f^*\alpha = d(\beta \circ f)$. Enfin des propriétés algébriques de la transposition assurent que $f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta)$.

Exemple 2 *Si dim(V) = m, et si $f_1, ..., f_m$ sont les coordonnées de f et si l'on a*

$$\alpha_y = \sum_{1 \leq i_1 \leq ... \leq i_p \leq m} \alpha_{i_1,...,i_p}(y) dy^{i_1} \wedge ... \wedge dy^{i_p}$$

alors nous aurons :

$$(f^*\alpha)_x = \sum_{1 \leq i_1 \leq ... \leq i_p \leq m} \alpha_{i_1,...,i_p}(f(x)) df^{i_1} \wedge ... \wedge df^{i_p}$$

Définition 1.2.7 *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert. La dérivée de Lie associée à un champ de vecteurs X est l'application linéaire :*

$$L_X : \Omega^p(U) \to \Omega^p(V)$$

qui à α associe la forme différentielle

$$\left(\frac{d}{dt}\right)(\varphi_t^*\alpha)_{|t=0}$$

où $\varphi_t := \varphi_t^X$ est le groupe local à un paramètre associé à X.

Exemple 3 *Soit $X = \partial_i$, alors $L_X\alpha = \sum_{1 \leq i_1 \leq ... \leq i_p} \partial_i \alpha_{i_1...i_p} dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_p}$.*

Théorème 5 *L'opérateur L_X est caractérisé par les propriétés suivantes :*

1. *Si $f \in C^\infty(U)$ alors, $L_X f = df(X)$*
2. *$L_X \circ d = doL_X$*
3. *$L_X(\alpha \wedge \beta) = L_X\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge L_X\beta$*

▶ L'unicité résulte du fait que *1)* détermine L_X sur les formes de degré 0, et *2)* et *3)* sur les formes de degré 1 et *3)* sur les formes de tout degré. Enfin, L_X satisfait les conditions (il suffit de se rappeler que la différentielle extérieure et l'image réciproque commutent: $d \circ \varphi_t^* = \varphi_t^* \circ d$). ■

Définition 1.2.8 *Le produit intérieur d'une forme différentielle α de degré $p > 0$ par un champ de vecteurs X est la forme de degré $p-1$, notée $i_X\alpha$ donnée par*

$$(i_X\alpha)_x(v_1, ..., v_{p-1}) = \alpha_x(X_x, v_1, ..., v_{p-1})$$

Si $f \in \Omega^0(U)$, on pose $i_X f = 0$.

Exemple 4 $X = \sum_{i=1}^n x^i \partial_i$, *alors* $i_X(dx^1 \wedge ... \wedge dx^n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x^i dx^1 \wedge ... \wedge \widehat{dx^i} \wedge ... \wedge dx^n$.

Théorème 6 ***(Formule de Cartan)***
Si X est un champ de vecteurs sur $U \subset \mathbb{R}^n$, et ω une forme différentielle, on a :

$$L_X w = d(i_X w) + i_X(dw)$$

soit

$$L_X = d \circ i_X + i_X \circ d$$

▶ Posons $P_X = doi_X + i_X \circ d$. Il suffit de vérifier que P_X a toutes les propriétés caractéristiques de L_X. Mais $P_X f = df(X) = L_X f$ et P_X commute avec d. Enfin, si $deg(\alpha) = p$ on a

$$i_X(\alpha \wedge \beta) = (i_X\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (i_X\beta)$$

donc $d(i_X(\alpha\wedge\beta)) = (d(i_X\alpha))\wedge\beta + (-1)^{p-1}(i_X\alpha)\wedge d\beta + (-1)^p d\alpha \wedge i_X\beta + (-1)^{2p}\alpha\wedge(d(i_X\beta))$ et comme $i_X(d(\alpha\wedge\beta)) = (i_X(d\alpha)\wedge\beta) + (-1)^{p+1}d\alpha\wedge i_X\beta + (-1)^p(i_X\alpha)\wedge d\beta + (-1)^{2p}\alpha\wedge i_X d\beta$, on finit par trouver en sommant, que

$$P_X(\alpha \wedge \beta) = (P_X\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (P_X\beta)$$

d'où le résultat par le dernier théorème. ■

Lemme 1.3 *Soit X un champ de vecteurs sur $U \subset \mathbb{R}^n$, dont le flot local $\varphi_t := \varphi_t^X$ est défini sur tout U pour $t \in I$, I intervalle. Alors, pour toute forme α de degré p fermée sur U, la forme $\varphi_{t_1}^*\alpha - \varphi_{t_0}^*\alpha$ est exacte pour $t_0, t_1 \in I$ quelconques.*

▶ $\varphi_{t_1}^*\alpha - \varphi_{t_0}^*\alpha = \int_{t_O}^{t_1} \left(\frac{d}{dt}\varphi_t^*\alpha\right) dt$, et on remarque que

$$\frac{d}{du}\left(\varphi_u^*\alpha\right)_{u=t} = \frac{d}{du}\left(\varphi_u^*(\varphi_t^*\alpha)\right)_{u=0} = L_X(\varphi_t^*\alpha)$$

On applique la formule de Cartan, et en utilisant le fait qu'une l'image réciproque d'une forme fermée est fermée, on obtient :

$$\frac{d}{dt}\varphi_t^*\alpha = (d \circ i_X + i_X \circ d)(\varphi_t^*\alpha) = d(i_X(\varphi_t^*\alpha))$$

et donc $\varphi_{t_1}^*\alpha - \varphi_{t_0}^*\alpha = \int_{t_0}^{t_1}\left(d(i_X(\varphi_t^*\alpha))\right) dt = d\left(\int_{t_0}^{t_1}\left(i_X(\varphi_t^*\alpha)\right) dt\right)$. ■

Théorème 7 ***(Lemme de Poincaré)***
Si $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert étoilé, toute forme fermée sur U est exacte.

▶ Par translation, on peut supposer U étoilé par rapport à l'origine. En reprenant les calculs du lemme pour le champ de vecteurs $X_x = x$, de flot $\varphi_t^X(x) = e^t x$, on obtient alors pour tout $t_0 < 0$:

$$\alpha - \varphi_{t_0}^*\alpha = dw$$

où

$$w_x(v_1, ..., v_{p-1}) = \int_{t_0}^{0} \alpha_{e^t x}(e^t x, e^t v_1, ..., e^t v_{p-1})dt$$

il sera commode de poser $e^t = u$, et $h_\lambda(x) = \lambda x$. Si $e^{t_0} = \lambda_0$, on voit alors que $\alpha - h_{\lambda_0}^* = d\beta_{\lambda_0}$, où

$$(\beta_\lambda)_x(v_1, ..., v_{p-1}) = \int_\lambda^1 u^{p-1}\alpha_{ux}(x, v_1, ..., v_{p-1})du$$

En faisant tendre λ_0 vers 0, on voit que $\alpha = d\beta$ avec :

$$\beta_x(v_1, ..., v_{p-1}) = \int_0^1 u^{p-1}\alpha_{ux}(x, v_1, ..., v_{p-1})du$$

ce qui prouve le théorème. ■

Corollaire 1.1 $H^k(\mathbb{R}^n) \simeq \left\{\begin{smallmatrix} \mathbb{R} \ si \ k=0 \\ 0 \ si \ k\neq 0 \end{smallmatrix}\right.$

1.3 Cohomologie à support compact et Dualité de Poincaré

Nous commençons à prouver grâce aux derniers résultats que la définition de $\chi(M)$ a un sens dès que M est compacte.

Théorème 8 *Soit une variété M admettant un "fin" recouvrement fini, alors $H^k(M)$ est de dimension finie.*

▶ La suite de Mayer-Vietoris donne

$$... \to H^{q-1}(U \cap V) \xrightarrow{\Delta} H^q(U \cup V) \xrightarrow{R} H^q(U) \oplus H^q(V) \to ...$$

Remarquons tout d'abord que ceci prouve que si $H^q(U)$, $H^q(V)$ et $H^{q-1}(U \cap V)$ sont de dimensions finies, alors il en est de même de $H^q(U \cup V)$ car alors $Ker(R)$ et $H^q(U) \oplus H^q(V)$ sont de dimensions finies.
On procède par récurrence. C'est trivial pour M difféomorphe à $\mathbb{R}^n$, par le lemme de Poincaré. Alors, considérons un "fin" recouvrement $\{U_0, ..., U_p\}$ de notre variété, avec $p+1$ ouverts. Mais, $(U_0 \cup U_1 ... \cup U_{p-1}) \cap U_p$ possède évidemment un recouvrement avec p ouverts que l'on peut désigner par

$$\{U_{0,p}, ..., U_{p-1,p}\}$$

Par hypothèse de récurence, $H^q(U_0 \cup .. \cup U_{p-1})$, $H^q(U_p)$ et $H^q\left((U_0 \cup .. \cup U_{p-1}) \cap U_p\right)$ sont de dimensions finies. Dès lors, la remarque faite assure le résultat. ■

Définition 1.3.1 *Soit X une variété. Notons $\Omega_c^k(X)$ l'ensemble des formes différentielles de degré k à support compact, $F_c^k(X) = \{\alpha \in \Omega_c^k(X) | d\alpha = 0\}$ l'espace vectoriel des formes différentielles fermées de degré k à support compact et $d\Omega_c^{k-1}(X) = \{d\beta | \beta \in \Omega_c^{k-1}(X)\}$ l'espace vectoriel des formes exactes $d\beta$ de degré k où β est une $(k-1)$ forme à support compact. On appellera k-ième espace vectoriel de cohomologie de X à support compact, l'espace quotient*

$$H_c^k(X) = F_c^k(X) / d\Omega_c^{k-1}(X)$$

avec pour $k=0$, $H^0(X) = F_c^0(X)$. Si X est compact, alors bien sûr, $H_c^k(X) = H^k(X)$. Enfin la démonstration du dernier théorème peut être remaniée de façon à obtenir que $H_c^k(X)$ est aussi de dimension finie si X admet un "fin" recouvrement fini.

Nous allons donner une nouvelle forme de la suite de Mayer-Vietoris pour les $H_c^k(X)$, ce qui nous permettra de relier $H_c^k(X)$ et $H^k(X)$.

Lemme 1.4 *Soit $M = U \cup V$ une variété, U et V étant des ouverts de M. La séquence suivante est exacte :*

$$0 \to \Omega_c^k(U \cap V) \xrightarrow{r'} \Omega_c^k(U) \oplus \Omega_c^k(V) \xrightarrow{s'} \Omega_c^k(M) \to 0$$

où l'on a défini

$$r' : \begin{array}{ccc} \Omega_c^k(U \cap V) & \to & \Omega_c^k(U) \oplus \Omega_c^k(V) \\ w & \mapsto & (w|_U, -w|_V) \end{array}$$

$$s' : \begin{array}{ccc} \Omega_c^k(U) \oplus \Omega_c^k(V) & \to & \Omega_c^k(M) \\ (\alpha, \beta) & \mapsto & \alpha + \beta \end{array}$$

où une forme différentielle à support compact dans W ($W \subset M$ ouvert) est étendue par 0 en une forme différentielle à support compact dans M.

▶ L'injectivité de r' est claire. Enfin, si l'on choisit une partition de l'unité sur M (ν, μ) subordonnée à (U,V) et si $\gamma \in \Omega_c^k(M)$, alors $\gamma = \mu\gamma + \nu\gamma$, et $\gamma = s'(\mu\gamma, \nu\gamma)$. Montrons enfin que $Im(r') \supset Ker(s')$. En effet, si $s'(\alpha, \beta) = 0$, alors comme $Supp(\alpha) \subset U$ et $Supp(\beta) \subset V$, $Supp(\alpha) \subset U \cap V$ et $Supp(\beta) \subset U \cap V$. (α, β) est l'image de $\alpha = -\beta \in \Omega_c^k(U \cap V)$. ■

Théorème 9 ***(Suite de Mayer-Vietoris pour les formes à support compact)*** *Si $M = U \cup V$ où U et V sont des ouverts, alors il existe une application lineaire Λ' de $H_c^k(M)$ dans $H_c^{k+1}(U \cap V)$ telle que la suite suivante soit exacte :*

$$H_c^k(U \cap V) \xrightarrow{R'} H_c^k(U) \oplus H_c^k(V) \xrightarrow{S'} H_c^k(M) \xrightarrow{\Lambda'} H_c^{k+1}(U \cap V)$$

▶ La démonstration est identique au cas de la suite de Mayer-Vietoris en partant du dernier lemme. ■

Théorème 10 ***(Suite exacte de cohomologie à supports compacts du couple (M,N))*** *Soit U l'ouvert $M - N$. La suite suivante est exacte :*

$$\cdots \to H_c^k(U) \to H_c^k(M) \to H_c^k(N) \to H_c^{k+1}(U) \to H_c^{k+1}(M) \to \cdots$$

et l'on a en particulier $H_c^k(\mathbb{R}^n) = 0$ pour $k \neq n$ et $H_c^n(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}$.

▶ On admet que cette suite est bien exacte. Soit le point $N = (0, ..., 0, 1)$ de la sphère S^n. L'ouvert $U = S^n - N$ est bien sûr homéomorphe à $\mathbb{R}^n$. Dès lors, en écrivant la suite exacte pour le couple (M,N) et en se souvenant des résultats pour $H_c^k(S^n) = H^k(S^n)$ on a le résultat. ■

Remarque 5 *Si $n \neq m$ alors $\mathbb{R}^n$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^m$.*

Proposition 1.3 *Soit M une variété connexe par arcs orientable de dimension n, alors $H_c^n(M) \simeq \mathbb{R}$.*

▶ Soit w une forme de degré n, avec $\int_M w \neq 0$ et w à support compact inclus dans un ouvert $U \simeq \mathbb{R}^n$ de M. Le but est de prouver que si $w' \in \Omega_c^n(M)$, alors $\exists c \in \mathbb{R}$, $\exists \eta \in \Omega_c^{n-1}(M)$ telle que $w' = cw + d\eta$. Mais comme w est à support compact, on peut trouver une partition de l'unité (μ_i) avec $w = \sum_{i=1}^k \mu_i w$ où $\mu_i w$ est à support compact dans l'ouvert U_i avec U_i difféomorphe à $\mathbb{R}^n$. Bref, on s'est ramené à prouver que $\exists c_i, \exists \eta_i$ tels que $\mu_i w' = c_i w + d\eta_i$. Maintenant, si w' est à support dans $V \subset M$ difféomorphe à $\mathbb{R}^n$ alors, on construit une suite d'ouverts U_i tels que $U_0 = U$ et $U_l = V$ avec $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ et U_i difféomorphe à $\mathbb{R}^n$ ce qui est possible puisque M est connexe par arcs. Alors on prend les w_i à support dans $U_i \cap U_{i+1}$ et telles que $\int_{U_i \cap U_{i+1}} w_i \neq 0$. Mais comme le résultat de la proposition est vrai pour $\mathbb{R}^n$ par le dernier théorème, on obtient l'existence de $(\eta_i)_{i \leq l}$ à support compact inclus dans U_i et de $(c_i)_{i \leq l}$ tels que :

$$w_1 - c_1 w = d\eta_1$$
$$w_2 - c_2 w_1 = d\eta_2$$
$$\vdots$$
$$w' - c_l w_{l-1} = d\eta_l$$

Dès lors, on conclut avec le début de la démonstration. ■

Définition 1.3.2 *On sait que pour une variété M de dimension n connexe par arcs et orientée, $H_c^n(M) \simeq \mathbb{R}$. Dans ces conditions, on pose PD l'application :*

$$\begin{array}{lll} H^k(M) & \rightarrow & H_c^{n-k}(M)^* \\ \alpha & \mapsto & \left(\begin{array}{lll} H_c^{n-k}(M) & \rightarrow & H_c^n(M) \simeq \mathbb{R} \\ \beta & \mapsto & \alpha \smile \beta \end{array} \right) \end{array}$$

où l'on a défini le "cup" produit $\smile$ par :

$$\begin{array}{lll} H^k(M) \times H^l(M) & \rightarrow & H^{k+l}(M) \\ ([\alpha], [\beta]) & \mapsto & [\alpha \wedge \beta] = [\alpha] \smile [\beta] \end{array}$$

qui peut être étendue aisément à une application de $H^k(M) \times H_c^l(M)$ dans $H_c^{k+l}(M)$. L'objet de ce qui suit est de montrer que PD réalise un isomorphisme de $H^k(M)$ dans $H_c^{n-k}(M)^*$.

Lemme 1.5 *Soit $M = U \cup V$. Si PD est un isomorphisme pour tout k sur U, V, et $U \cap V$, alors PD est un isomorphisme pour tout k sur M.*

▶ En écrivant la suite de Mayer-Vietoris, puis la suite duale de Mayer-Vietoris pour les formes à support compact, on obtient, par "passage à l'espace dual" :

$$\begin{array}{ccccccccc} H^{k-1}(U) \oplus H^{k-1}(V) & \rightarrow & H^{k-1}(U \cap V) & \rightarrow & H^k(M) & \rightarrow & H^k(U) \oplus H^k(V) & \rightarrow & H^k(U \cap V) \\ \downarrow PD \oplus PD & & \downarrow PD & & \downarrow ? & & \downarrow PD \oplus PD & & \downarrow PD \\ \left(H_c^{n-k+1}(U) \oplus H_c^{n-k+1}(V)\right)^* & \rightarrow & H_c^{n-k+1}(U \cap V)^* & \rightarrow & H_c^{n-k}(M)^* & \rightarrow & \left(H_c^{n-k}(U) \oplus H_c^{n-k}(V)\right)^* & \rightarrow & H_c^{n-k}(U \cap V)^* \end{array}$$

et il reste à prouver que " $\downarrow ?$ " est bien un isomorphisme. Mais ce résultat est un résultat d'algèbre pure :

Lemme 1.6 ***(Lemme des 5)***
Si $V_1, ..., V_5$ et $W_1, ..., W_5$ sont des espaces vectoriels et $\phi_i : V_i \rightarrow W_i$ $(i = 1, ..., 5)$ des applications linéaires. Alors le fait que $\phi_1, \phi_2, \phi_4, \phi_5$ soient des isomorphismes et que les suites suivantes soient exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} V_1 & \stackrel{\alpha_1}{\rightarrow} & V_2 & \stackrel{\alpha_2}{\rightarrow} & V_3 & \stackrel{\alpha_3}{\rightarrow} & V_4 & \stackrel{\alpha_4}{\rightarrow} & V_5 \\ \downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi_2 & & \downarrow \phi_3 & & \downarrow \phi_4 & & \downarrow \phi_5 \\ W_1 & \stackrel{\beta_1}{\rightarrow} & W_2 & \stackrel{\beta_2}{\rightarrow} & W_3 & \stackrel{\beta_3}{\rightarrow} & W_4 & \stackrel{\beta_4}{\rightarrow} & W_5 \end{array}$$

infère que ϕ_3 est aussi un isomorphisme.

▶ $\phi_3(x) = 0 \Rightarrow \beta_3 \phi(x) = 0 \Rightarrow \phi_4 \alpha_3(x) = 0$ car ϕ_4 est un isomorphisme. Mais $x = \phi_2(v_2)$ avec $v_2 \in V_2$. Donc, $0 = \phi_3(x) = \phi_3 \alpha_2(v_2) = \beta_2 \phi_2(v_2)$. Mais $\phi_2(v_2) = \beta_1(w_1)$, $w_1 \in W_1$ puisque $Ker \beta_2 = Im \beta_1$ et $w_1 = \phi_1(v_1)$, $v_1 \in V_1$. Dès lors, comme $\beta_1 \circ \phi_1 = \phi_2 \circ \alpha_1$,

$$\phi_2(v_2) = \beta_1(w_1) = \beta_1 \phi_1(v_1) = \phi_2 \alpha_1(v_1)$$

et ainsi $v_2 = \alpha_1(v_1)$ puique ϕ_2 est un isomorphisme. Donc, $x = \alpha_2(v_2) = \alpha_2(\alpha_1(v_1)) = 0$ puisque $Im(\alpha_1) = Ker(\alpha_2)$. Donc ϕ_3 est injective.

Voyons maintenant la surjectivité. Soit $w_3 \in W_3$. Montrons qu'il existe $v_3 \in V_3$ avec $\phi_3(v_3) = w_3$. ϕ_4 est un isomorphisme : $\exists v_4 \in V_4$ tel que

$$\phi_4(v_4) = \beta_3(w_3) \qquad (*)$$

Donc $\beta_4 \circ \phi_4(v_4) = 0 = \phi_5 \circ \alpha_4(v_4)$, d'où $\alpha_4(v_4) = 0$ car ϕ_5 est un isomorphisme. Dès lors, $\exists v_3' \in V_3$ tel que $\alpha_3(v_3') = v_4$. On évalue ensuite $\beta_3(-w_3 + \phi_3(v_3')) = \beta_3(\phi_3(v_3')) - \beta_3(w_3) = \phi_4(v_4) - \beta_3(w_3) = 0$ par $(*)$. D'où $\phi_3(v_3') - w_3 \in Im(\beta_2)$ et $\exists w_2 \in W_2$ tel que $\beta_2(w_2) = \phi_3(v_3') - w_3$. Mais $\exists v_2 \in V_2$ tel que $w_2 = \phi_2(v_2)$ et $\beta_2\phi_2(v_2) = \phi_3(v_3') - w_3$ et $\beta_2 \circ \phi_2 = \phi_3 \circ \alpha_2$. D'où $\phi_3\alpha_2(v_2) = \phi_3(v_3') - w_3$ et ainsi $w_3 = \phi_3(v_3' - \alpha_2(v_2))$ et bien sûr, $v_3' - \alpha_2(v_2) \in V_3$. ■

Théorème 11 ***(Dualité de Poincaré)***
M une variété connexe par arcs, orientée et de type fini. Alors $PD : H^k(M) \to H_c^{n-k}(M)^*$ est un isomorphisme.

▶ Le raisonnement s'établit par récurrence sur le nombre d'ouverts qui constituent un "fin" recouvrement de M. Le théorème est vrai pour $r = 1$ d'après différents résultats que nous avons établi. Si l'on suppose le résultat vrai pour r, alors si $\{U_1, ..., U_r, U\}$ désigne un "fin" recouvrement de M, on pose $V = U_1 \cup ... \cup U_r$. Le théorème est vrai pour U, V et $U \cap V = (U \cap U_1) \cup ... \cup (U \cap U_r)$. Le lemme permet alors de conclure. ■

Corollaire 1.2 *M variété compact connexe par arcs et orientable de dimension n. Alors $dim\, H^{n-k}(M) = dim\, H^k(M)$. Si de plus, n est impair, alors $\chi(M) = 0$.*

Définition 1.3.3 *Soit M une variété différentiable orientée telle que $f : M \to N$ soit propre (ce qui est le cas si M est compacte) où N est connexe. Si y est valeur régulière de f alors on appelle degré en y :*

$$deg(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} sign(df_x) \in \mathbb{Z}$$

Proposition 1.4 *L'entier $deg(f, y)$ ne dépend pas de la valeur régulière y choisie.*

Définition 1.3.4 *Soit x un zéro isolé d'un champ de vecteurs X. On définit l'indice de x de la façon suivante : on choisit une carte (U, ϕ) telle que $\phi(x) = 0$ et que x soit le seul zéro de X contenu dans U. L'indice de x, noté $ind_x X$ est alors le degré de l'application de*

$$y \to \frac{\phi_* X(y)}{||\phi_* X(y)||} \text{ de } S^{n-1}(\varepsilon) \text{ dans } S^{n-1}$$

$S^{n-1}(\varepsilon)$ étant une petite sphère centrée en 0, de rayon ε et incluse dans $\phi(U)$.

Proposition 1.5 *L'indice ne dépend ni de ϕ, ni de ε.*

Théorème 12 ***(Poincaré-Hopf)***
Soit M^n une variété différentiable compacte. Soit X un champ de vecteurs sur M différentiable et qui n'a que des zéros isolés. Alors

$$\sum_p ind_p X = \chi(M)$$

Exemple 5 *$\chi(S^2) = 2$ et $\chi(S^{2n}) = 2$ de manière générale.*

Nous allons maintenant "étendre" la définition de $\chi(M)$ en introduisant la classe d'Euler. Le but du prochain paragraphe est de donner un sens à cette extension et de la relier à ce que nous avons dit précédemment.

1.4 La classe d'Euler

Définition 1.4.1 *Soit (M^n, μ) une variété compacte connexe orientée de dimension n et soit $\xi := \pi : E \to M$ un fibré orienté de dimension k sur M et d'orientation ν (c'est à dire une collection de $\{\nu_x\}$ d'orientations -compatibles- sur les fibres $\pi^{-1}(x)$). Alors on appelle classe de Thom, l'unique élément U de $H_c^k(E)$ tel que*

$$\forall p \in M, \; j_p^*(U) = \nu_p \in H_c^k(\pi^{-1}(p))$$

où $j_p : \pi^{-1}(p) \to E$ est l'inclusion canonique de la fibre $\pi^{-1}(p)$.

▶ D'après la proposition n°1.3, $H_c^k(E) \simeq H^n(E) \simeq H^n(M) \simeq \mathbb{R}$, et par conséquent si $U' \in H_c^k(E)$ est une autre classe, alors U et U' sont proportionnelles. Mais l'utilisation de l'inclusion canonique montre que ce rapport de proportionalité ne peut être que 1. ■

Définition 1.4.2 *On reprend les notations de la précédente définition. Soit $s : M \to E$ une section. Alors, la classe d'Euler est :*

$$\chi(\xi) = s^*U \in H^k(M)$$

Cette définition a un sens puisqu'il existe toujours la section nulle définissant un plongement de M dans E et que 2 sections sont toujours homotopes.

Théorème 13 *Soit M une variété compacte connexe d'orientation ν (qui est aussi l'orientation du fibré tangent $\pi : TM \to M$). Soit X un champ de vecteurs avec un nombre fini de zéros. Alors,*

$$\chi(\pi) = \left(\sum_p ind_p X \right) \nu = (\chi(M))\, \nu \in H^n(M)$$

soit en d'autres termes, si U est une forme de $F_c^n(E)$ représentant la classe de Thom U de π, alors

$$\int_{(M,\nu)} X^*(\mathrm{U}) = \sum_p ind_p X$$

▶ Admis. ■

Définition 1.4.3 *Soient $\xi_1 := \pi_1 : E_1 \to X_1$ et $\xi_2 := \pi_2 : E_2 \to X_2$ des fibrés de même dimension. Soit (f, g) un couple d'applications continues avec $f : X_1 \to X_2$ et $g : E_1 \to E_2$ qui vérifient les conditions:*

$$\begin{array}{ll} \pi_2 \circ g = f \circ \pi_1 & \\ g : \pi_1^{-1}(x) \to \pi_2^{-1}(f(x)) & \quad \textit{est un isomorphisme d'espace vectoriel} \end{array}$$

Nous dirons dans ces conditions que (f, g) consitute une fibration ou que g est une fibration qui recouvre f. Enfin, si f est l'identité on parle d'équivalence.

Définition 1.4.4 *Soit $\xi := \pi : E \to M$ un fibré vectoriel (par la suite on pourra étendre la définition au cas d'un fibré principal) et $f : X \to M$ une application continue. Soit $E' = \{(x, e) | f(x) = \pi(e)\} \subset X \times E$ et $\pi' : E' \to X$ définie par $\pi'((x, e)) = x$ et ainsi $\pi'^{-1}(x) = \{x\} \times \pi^{-1}(f(x))$. Dans ce cas $f^*\xi := \pi' : E' \to X$ est un fibré vectoriel appelé fibré induit par f et ξ, et l'application $g : E' \to E$ telle que $g((x, e)) = e$ une fibration qui recouvre f.*

Remarque 6 *$\xi := \pi : E \to M$ un fibré vectoriel. Alors si $f : X \to Y$ et $g : Z \to X$ sont continues,*

$$g^*(f^*\xi) = (f \circ g)^*\xi$$

Lemme 1.7 *Soient M et $\widetilde{M}$ deux variétés compactes orientées, et soit $\xi := \pi : E \to M$ un fibré vectoriel de classe C^∞ sur M. Considérons $f : \widetilde{M} \to M$ une application C^∞. Si $\widetilde{E}$ désigne l'espace total de $f^*\xi$ et $\widetilde{f} : \widetilde{E} \to E$ est une fibration qui recouvre f, alors*

$$\widetilde{f}^*(U(\xi)) = U(f^*\xi) \in H_c^n(\widetilde{E})$$

▶ Comme $\widetilde{f}$ est propre, $\widetilde{f}^*$ envoie $H_c^n(E)$ sur $H_c^n(\widetilde{E})$. Soit $f^*\xi := \widetilde{\pi} : \widetilde{E} \to \widetilde{M}$. Soit $\widetilde{p} \in \widetilde{M}$ et soit l'inclusion $j_{\widetilde{p}} : \widetilde{\pi}^{-1}(\widetilde{p}) \to \widetilde{E}$, alors

$$j_{\widetilde{p}}^* \circ \widetilde{f}^* U(\xi) = (\widetilde{f} \circ j_{\widetilde{p}})^* U(\xi)$$

Puisque $j_{f(\widetilde{p})}^* U(\xi)$ est le générateur de $H_c^n(\pi^{-1}(f(\widetilde{p})))$, on voit que $(\widetilde{f} \circ j_{\widetilde{p}})^* U(\xi)$ est le générateur de $H_c^n(\widetilde{\pi}^{-1}(\widetilde{p}))$. Dès lors on a bien $\widetilde{f}^*(U(\xi)) = U(f^*\xi)$. ■

Proposition 1.6 *Soient M et $\widetilde{M}$ deux variétés compactes orientées, et soit $\xi := \pi : E \to M$ un fibré vectoriel de classe C^∞ sur M. Considérons $f : \widetilde{M} \to M$ une application C^∞. Alors*

$$f^*\chi(\xi) = \chi(f^*\xi)$$

▶ Soit $\widetilde{s_0}$ la section nulle de $f^*\xi$ et s_0 la section nulle de de ξ. Alors $\widetilde{f} \circ \widetilde{s_0} = s_0 \circ f$ par définition de $\widetilde{f}$. Mais $\chi(f^*\xi) = (\widetilde{s_0})^* U(f^*\xi)$ et par le lemme précédent,

$$\begin{aligned}
\chi(f^*\xi) &= (\widetilde{s_0})^* \widetilde{f}^* U(\xi) \\
&= (\widetilde{f} \circ \widetilde{s_0})^* U(\xi) \\
&= (s_0 \circ f)^* U(\xi) \\
&= (f^* \circ s_0^*) U(\xi) \\
&= f^* \chi(\xi)
\end{aligned}$$

D'où l'égalité souhaitée. ■

2 Courbure de Gauss

2.1 L'outil Pfaffien

Soit une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $n = 2m$ pair. On définit le Pfaffien de A, $Pf(A)$, par

$$Pf(A) = \frac{1}{2^m m!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdots a_{\sigma(n-1)\sigma(n)}$$

où l'on a posé $\mathbb{S}_n$ l'ensemble des permutations à n éléments, et où ε désigne la signature d'une permutation.

Proposition 2.1 *Soit $n = 2m$. Alors pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ (où $\mathcal{A}$ est une algèbre commutative), on a :*

$$Pf(B^TAB) = det(B)Pf(A)$$

► $2^m m! Pf(B^TAB)$
$= \sum\limits_{\sigma\in\mathbb{S}_n} \varepsilon(\sigma) \sum\limits_{\sigma'\in\mathbb{S}_n} (b_{\sigma'(1)\sigma(1)}a_{\sigma'(1)\sigma'(2)}b_{\sigma'(2)\sigma(2)})...(b_{\sigma'(n-1)\sigma(n-1)}a_{\sigma'(n-1)\sigma'(n)}b_{\sigma'(n)\sigma(n)})$
$= \sum\limits_{\sigma'\in\mathbb{S}_n} \left(\sum\limits_{\sigma\in\mathbb{S}_n} \varepsilon(\sigma)b_{\sigma'(1)\sigma(1)}....b_{\sigma'(n)\sigma(n)} \right) a_{\sigma'(1)\sigma'(2)}...a_{\sigma'(n-1)\sigma'(n)}$
$= \sum\limits_{\sigma'\in\mathbb{S}_n} \varepsilon(\sigma')det(B)a_{\sigma'(1)\sigma'(2)}...a_{\sigma'(n-1)\sigma'(n)}$. ■

Nous allons maintenant faire un peu d'algèbre linéaire afin d'étudier le Pfaffien dans le cadre des matrices antisymétriques. Nous conviendrons que si A et B sont des matrices, alors $A \oplus B$ désigne la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

Proposition 2.2 *Soit $A \in \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Alors*

$$(Pf(A))^2 = det(A)$$

► Il suffit de prouver le résultat pour les matrices de $GL_{2m}(\mathbb{R})$ puisque $GL_{2m}(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R})$ et que les deux membres de l'égalité sont des fonctions continues en les coefficients de A. Supposons donc $det(A) \neq 0$. On sait qu'il existe une réduction de A de la forme $B^TAB = \begin{pmatrix} S & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & S \end{pmatrix}$ avec $B = \lambda B'$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) et B' matrice orthogonale et $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$. Mais, en revenant à la définition du Pfaffien, on voit tout de suite que :

$$Pf \begin{pmatrix} S & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & S \end{pmatrix} = 1$$

Par conséquent, $1 = (det(B))^2\, det(A)$ et la dernière proposition nous donne d'un autre côté que $det(B)Pf(A) = 1$. ■

Pour toute matrice antisymétrique $A \in \mathcal{M}_{2m+1}(\mathbb{R})$, nous poserons $Pf(A) = 0$ et dans ce cas la proposition reste vraie puisque $det(A) = 0$.

Proposition 2.3 *Soient A et B deux matrices antisymétriques. Alors*

$$Pf(A \oplus B) = Pf(A)\, Pf(B)$$

► $Pf(A \oplus B)^2 = det(A)det(B) = Pf(A)^2Pf(B)^2$. En s'appuyant sur les propriétés des matrices S, on peut conclure. ■

2.2 Dérivations et Champs de Vecteurs

Définition 2.2.1 *Une dérivation sur une variété M est une application linéaire δ de l'algèbre $C^\infty(M,\mathbb{R}) = C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M)$ telle que*

$$\forall (f,g) \in C^\infty(M) \times C^\infty(M), \delta(fg) = f\delta(g) + g\delta(f)$$

Exemple 6 *Il est clair que $\forall i \in [1,n]$ $f \mapsto \partial_i f$ est une dérivation (en se plaçant dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$), et que si (X_i) sont lisses, alors*

$$f \mapsto L_X f := \sum_{i=1}^n X_i \partial_i f$$

est aussi une dérivation, appelée dérivation associée à X que l'on peut −par les changements de carte− définir sur M. En fait il y a un isomorphisme entre l'espace des dérivations et celui des champs de vecteurs.

Définition 2.2.2 *Si X est un champ de vecteurs sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, la dérivation associée à X en x est donnée par :*

$$(L_X f)(x) = d_x f \cdot (X_x).$$

et nous conviendrons de noter ∂_i la dérivation associée au champ constant égal au $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique.

Définition 2.2.3 *Soit $\phi : U \to V$ un difféomorphisme entre ouverts de $\mathbb{R}^n$, et δ une dérivation sur U. L'image de δ par ϕ est la dérivation sur V suivante :*

$$g \mapsto (\delta(g \circ \phi)) \circ \phi^{-1}$$

Si X est un champ de vecteurs associé à δ, nous noterons $\phi_* X$ le champ associé à l'image de δ, et dirons aussi que ce champ est l'image de X par ϕ.

Proposition 2.4 *$\forall \phi : U \to V$ difféomorphisme, $\forall X$ champ de vecteurs sur U ouvert, $\forall y \in V$,*

$$(\phi_* X)_y = d_{\phi^{-1}(y)}\phi \cdot X_{\phi^{-1}(y)}$$

où $d_x\phi$ désigne toujours l'application linéaire tangente en x de ϕ.

► $(\delta(go\phi))(x) = d_x(go\phi) \cdot X_x = d_{\phi(x)}g(d_x\phi \cdot X_x)$ et on a le résultat en remplaçant x par $\phi^{-1}(y)$. ■

Définition 2.2.4 *Le crochet de deux champs de vecteurs X et Y, noté $[X,Y]$ est le champ de vecteurs correspondant à la dérivation $L_X L_Y - L_Y L_X$ donnée par les dérivations associées aux champs X et Y. Par ailleurs, on a la formule :*

$$[fX, gY] = f(L_X g)Y - g(L_Y f)X + fg[X,Y]$$

Proposition 2.5 *Si X et Y sont deux champs de vecteurs sur U et si ϕ est un difféomorphisme de U sur V, alors :*

$$\phi_*[X,Y] = [\phi_* X, \phi_* Y]$$

▶ C'est immédiat en considérant les dérivations correspondantes. ■

Proposition 2.6 *Soit X un champ de vecteurs sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$, et $\psi : U \to V$ un difféomorphisme. Si φ_t^X est le flot de X, celui du champ image $\psi_* X$ est :*

$$\psi \circ \varphi_t^X \circ \varphi^{-1}$$

▶ On remarque tout d'abord que le système différentiel donné lors de la résolution du théorème n°4 est autonome : si $t \mapsto c(t)$ est solution, il en va de même de $t \mapsto c(t+t')$ $\forall t' \in \mathbb{R}$. Ainsi, $c_x(t+t') = c_{c_x(t')}(t)$ et donc $\varphi_{t+t'}^X(x) = \varphi_t^X(\varphi_{t"}^X(x))$ lorsque les deux membres sont bien définis.
Maintenant, on pose $h(t,x) = \psi \circ \varphi_t \circ \psi^{-1}(x)$. D'après la remarque faite, 1) et 2) du lemme n°1.2 sont vérifiés, et pour la partie 3), il suffit de remarquer que :

$$\frac{d}{dt}\psi \circ \varphi_t^X \circ \psi^{-1}(x)_{|t=0} = d_{\psi^{-1}(x)}\psi . X_{\psi^{-1}(x)} = \psi_* X_x$$

d'après la proposition n°2.4. ■

Nous introduisons maintenant une nouvelle structure algébrique : les groupes de Lie.

Définition 2.2.5 *Un groupe de Lie est un groupe G muni d'une structure de variété lisse telle que l'application*

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \to & G \\ (g,h) & \mapsto & gh^{-1} \end{array}$$

est lisse.

Définition 2.2.6 *Soit G un groupe de Lie, M une variété et $\begin{array}{ccc} M \times G & \to & M \\ (p,a) & \mapsto & p \cdot a \end{array}$ une application C^∞. On dit que G agit sur M à droite si*

(1) $\forall a,\ R_a : \begin{array}{ccc} M & \to & M \\ p & \mapsto & p \cdot a \end{array}$ *est un difféomorphisme, appelé translation à droite*
(2) $\forall p \in M, \forall (a,b) \in G^2,\ p \cdot (ab) = (p \cdot a) \cdot b$

La $2^{ème}$ condition peut aussi être vue sous la forme $R_{ab} = R_b \circ R_a$. Evidemment, $R_e = Id_{|M}$, et l'on peut définir bien sûr de manière similaire la transformation à gauche L_a.

Définition 2.2.7 *Un champ de vecteurs $X \in \Gamma(TG)$ est invariant à droite si*

$$\forall g \in G,\ R_{g*}X = X$$

Proposition 2.7 *Nous désignerons dans la suite par $\tilde{I}$ le difféomorphisme suivant: $\begin{array}{c} G \to G \\ x \mapsto x^{-1} \end{array}$. Alors,*

1) *Si X et Y sont deux champs invariants à droite, il en est de même de $X+Y$ et $[X,Y]$*
2) *Si X est invariant à droite, alors $\tilde{I}X$ est invariant à gauche.*
3) *Si X est invariant à gauche, il en va de même de $R_{g*}X$*

▶ 1) est une conséquence de la proposition n°2.5. Pour 2), il suffit de voir que $(gx)^{-1} = x^{-1}g^{-1}$ et donc $\tilde{I} \circ L_g = R_{g^{-1}} \circ \tilde{I}$. Enfin, les translations à droite commutant avec les translations à gauche, si X est un invariant à gauche, on a

$$L_{h*}(R_{g*}X) = R_{g*}(L_{h*}X) = R_{g*}X$$

et l'on a 3) à partir de 2). ■

Proposition 2.8 *Si G est un groupe de Lie, l'application $X \mapsto X_e$ est un isomorphisme entre l'espace vectoriel des champs de vecteurs invariants à gauche sur G et l'espace tangent T_eG. Ceci prouve entre autre l'existence de champs invariants à gauche.*

▶ Si $X \in \Gamma(TG)$ est invariant à gauche, alors $d_eL_g \cdot X_e = X_g$ d'où l'injectivité. Vérifions maintenant que pour un vecteur $v \in T_eG$ donné

$$g \mapsto d_eL_g \cdot v$$

est un champ de vecteurs invariant. Montrons que cette application est une dérivation. Pour $f \in C^\infty(G)$, désignons par $L_v(f)$ la fonction

$$g \mapsto d_gf \cdot (d_eL_g \cdot v)$$

Clairement, $L_v(fg) = (L_vf)g + f(L_vg)$. Enfin, $L_v(f)$ est lisse : si $c :]-\varepsilon, \varepsilon[\to G$ est une courbe C^∞ telle que $c(0) = e$ et $c'(0) = v$. Alors, par le théorème des fonctions composées :

$$L_vf(g) = \frac{d}{dt}f(gc(t))_{|t=0}$$

Mais la fonction $(t, g) \mapsto f(gc(t))$ est C^∞ sur $]-\varepsilon, \varepsilon[\times G$, il en est de même de sa dérivée partielle par rapport à t. ■

2.3 Algèbre de Lie et Représentation Adjointe

Définition 2.3.1 *Une algèbre de Lie sur un corps K est un espace vectoriel L sur K, muni d'une application bilinéaire de $L \times L$ dans L, appelée crochet et noté $[\ ,\ ]$ telle que*
i) $\forall X \in L$, $[X, X] = 0$.
ii) $\forall X, Y, Z \in L$, $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ (Identité de Jacobi)

Exemple 7 *Pour toute variété lisse M, l'espace vectoriel $\Gamma(TM)$ est une algèbre de Lie de dimension infinie pour le crochet donné dans la définition n°2.2.4.*

Remarque 7 *D'après la proposition n°2.7, les champs de vecteurs invariants à gauche (ou à droite) sur un groupe de Lie forment une algèbre de Lie.*

Définition 2.3.2 *L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie G, noté $\mathfrak{G}$, est T_eG muni du crochet induit par la définition n°2.3.1 et qui s'identifie à l'espace des champs invariants à gauche par la proposition n°2.8.*

Définition 2.3.3 *Etant donné un groupe de Lie G d'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$, l'application qui à $X \in \mathfrak{G}$ associe la valeur au temps 1 du groupe à un paramètre associé à X s'appelle l'application exponentielle; cette application se note exp.*

Proposition 2.9 *exp est une application lisse de $\mathfrak{G}$ dans G, et un difféomorphisme local d'un voisinage $0 \in \mathfrak{G}$ sur un voisinage de $e \in G$.*

▶ exp est lisse comme solution d'une famille d'équations différentielles dépendant de façon lisse d'un paramètre. Enfin, par définition

$$\frac{d}{dt} exp\ tX_{|t=0} = X$$

et on applique le théorème d'inversion locale. ■

Proposition 2.10 *On a*

$$(R_{g*}X)_e = \frac{d}{dt}(g^{-1} exp\ tXg)_{|t=0}$$

▶ Le flot de X est donné par $\phi_t(x) = x\, exp\, tX$ et d'après la proposition n°2.6, celui de $R_{g*}X$ par

$$(R_g \circ \phi_t \circ R_{g^{-1}})(x) = xg^{-1}\, exp\, tXg$$

Le sous groupe à un paramètre de G associé à $R_{g*}X$ est donc

$$t \mapsto g^{-1} exp\, tXg$$

D'où le résultat. ■

Nous poserons à l'avenir

$$Ad_g X = (R_{g^{-1}*}X)_e = \frac{d}{dt} g\, exp\, tX g^{-1}_{|t=0}$$

Alors, pour $X, Y \in \mathfrak{G}$, on a :

$$Ad_g[X, Y] = [Ad_g X, Ad_g Y]$$

et de plus

$$Ad_{gh} = Ad_g \circ Ad_h$$

Définition 2.3.4 *L'application Ad s'appelle la représentation de adjointe de G. Ad est un homomorphisme de G dans le groupe des automorphismes de l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$.*

Exemple 8 *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $t \mapsto exp\, tA$ est un sous-groupe à un paramètre de $GL_n(\mathbb{R})$. Si $G = GL_n(\mathbb{R})$, T_eG s'identifie à $End(\mathbb{R}^n)$ et exp à l'exponentielle des endomorphismes : $X \in End(\mathbb{R}^n) = \mathfrak{G}$, donne naissance au champ dont la valeur en A est AX et l'exponentielle s'obtient en intégrant :*

$$\begin{cases} A'(t) = A(t)X \\ A(0) = I \end{cases}$$

Alors $Ad_g A = \frac{d}{dt}\left(g\, exp\, tAg^{-1}\right)_{|t=0} = gAg^{-1}$.

Remarque 8 *On peut même vérifier que pour $X, Y \in \mathfrak{G}$, on a :*

$$\frac{d}{dt} Ad_{(exp\, tX)} Y_{|t=0} = [X, Y]$$

et en particulier le crochet est nul dès que G est commutatif. Ce résultat permet d'ailleurs de montrer qu'il y a un "passage" entre les propriétes des groupes de Lie et celles de leurs algèbres. Si G et H deux groupes de Lie et $f : G \to H$ un isomorphisme, alors $d_e f$ est un isomorphisme de l'algebre de Lie induite par G dans l'algèbre de Lie induite par H.

2.4 Tenseur de Courbure et Courbure de Gauss

Le but de ce paragraphe est de manipuler les connexions qui vivent sur le fibré tangent, d'introduire les tenseurs de coubure et de torsion, de donner des "règles de structure" via les équations de Cartan et enfin de définir la courbure de Gauss. Nous ferons par la suite le lien entre connexions du fibré tangent et connexions de Ehresmann qui seront introduites dans un cadre plus général: celui du fibré principal.

Définition 2.4.1 *Une connexion affine sur une variété lisse M de dimension n est une application ∇ qui associe à chaque champ de vecteurs différentiable $X \in \Gamma(TM)$ une application linéaire $\nabla_X : \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$ vérifiant :*

$$\begin{array}{ll} (1) & \nabla_{fX+gY} = f\nabla_X + g\nabla_Y \\ (2) & \nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (L_X f)Y \end{array}$$

où $f, g \in C^\infty(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$. L'opérateur ∇_X est appelé dérivation covariante par rapport à X.
Par ailleurs, on peut démontrer grâce au théorème de partition de l'unité qu'il existe toujours une métrique riemanienne $< \, , \, >$ sur la variété M. Alors, sur cette variété riemannienne M il existe une et une seule connexion affine vérifiant les conditions :

$$\begin{array}{ll} \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] & (\nabla \textit{ sans "torsion"}) \\ Z < X, Y > = < \nabla_Z X, Y > + < X, \nabla_Z Y > & (< \, , \, > \textit{ est "parallèle"}) \end{array}$$

et c'est avec cette connexion affine que nous travaillerons désormais.

▶ Admis. ■

Définition 2.4.2 $R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$ *est appelé le tenseur de courbure de la connexion ∇.*

Proposition 2.11 *Le tenseur de courbure vérifie les égalités suivantes :*

$$\begin{array}{ll} a) & R(X,Y)Z + R(Y,X)Z = 0 \\ b) & R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0 \\ c) & < R(X,Y)Z, W > + < R(X,Y)W, Z > = 0 \\ d) & < R(X,Y)Z, W > = < R(Z,W)X, Y > \end{array}$$

▶ Ces égalités résultent de calculs à partir de la condition "∇ sans torsion", de l'identité de Jacobi et de a). ■

Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée locale de champs de vecteurs définie sur U ouvert de M. On définit par $\omega^1, ..., \omega^n$ la base duale de $(e_i)_i$. De plus, on définit les n^2 formes ω^i_j de degré 1 sur U de la manière suivante :

$$\nabla_X e_j = \sum_{i=1}^{n} \omega^i_j(X) e_i$$

et l'on vérifie que l'on a la formule :

$$\omega^i_j(X) = \omega^i(\nabla_X e_j)$$

Enfin, on définit par R^i_{ljk} sur U par

$$R(e_j, e_k)e_l = \sum_i R^i_{ljk} e_i$$

Enfin, grâce à ces deux définitions, nous pouvons exprimer la forme de degré 2 de courbure bien connue Ω^i_j par :

$$\Omega^i_j = \frac{1}{2} \sum_{k,l} R^i_{jkl} \omega^k \wedge \omega^l$$

et les formes $\omega^i, \omega^i_j, \Omega^i_j$ sont reliées par les relations de structure de Cartan.

Proposition 2.12 ***(Equation de structure de Cartan)***

$$d\omega^i = -\sum_j \omega^i_j \wedge \omega^j \text{ et } d\omega^i_j = -\sum_k \omega^i_k \wedge \omega^k_j + \Omega^i_j.$$

▶ $0 = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$
$= \nabla_X \left(\sum_j \omega^j(Y) e_j \right) - \nabla_Y \left(\sum_j \omega^j(X) e_j \right) - \sum_j \omega^j([X, Y]) e_j$
$= \sum_j \left[X(\omega^j(Y)) - Y(\omega^j(X)) - \omega^j([X, Y]) e_j + \sum_k \left(\omega^j(Y) \omega^k_j(X) - \omega^j(X) \omega^k_j(Y) \right) e_k \right]$
et donc :
$= X(\omega^i(Y)) - Y(\omega^i(X)) - \omega^i([X, Y]) + \sum_j \left(\omega^i_j(X) \omega^j(Y) - \omega^i_j(Y) \omega^j(X) \right)$
et par les propriétés de la différentiation extérieure, en l'occurence pour une 1-forme w, $dw(X, Y) = \frac{1}{2} \left[Xw(Y) - Yw(X) - w([X, Y]) \right]$, on peut conclure. ■

Définition 2.4.3 $R_{ijkl} = \sum_{\gamma=1}^{n} g_{i\gamma} R^\gamma_{jkl}$ *avec* $g_{ij} =< e_i, e_j >$ *et donc, en posant* $\Omega_{ij} = \sum_k g_{ki} \Omega^k_j$, *on obtient :*

$$\Omega^i_j(e_{i'}, e_{j'}) = \frac{1}{2} R_{iji'j'}$$

Corollaire 2.1 *Si l'on note* $\Omega = (\Omega_{ij})_{i,j}$ *alors* Ω *est antisymétrique et par ailleurs on a* $R_{ijkl} = R_{jikl}$ *et* $R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0$ *(1ère identité de Bianchi).*

▶ Tout résulte de la propostion n°2.11. ■

Remarque 9 *On se replace momentanément dans le cas de la dimension 2. Soit* $(M, < >)$ *une variété riemannienne de dimension 2 et soient* X, Y *deux champs de vecteurs indépendants. Alors, si l'on note* $||X, Y||$ *l'aire du parallélogramme construit par X et Y, on a:*

$$K = \frac{< R(X, Y)Y, X >}{||X, Y||^2}$$

Définition 2.4.4 *Notons* $\mathcal{R}$ *le tenseur*

$$\mathcal{R}(X, Y, Z, W) =< R(X, Y)Z, W >$$

Définition 2.4.5 *Soit $U = V_1 \otimes ... \otimes V_k$ avec $V_i = V$ et $V_j = V^*$. Soit U' le produit tensoriel de tous les termes de U dans le même ordre en omettant V_i et V_j. Alors l'application*

$$(v_1, ..., v_k) \mapsto < v_i, v_j > v_1 \otimes ... \otimes \widehat{v_i} \otimes ... \otimes \widehat{v_j} \otimes ... \otimes v_k$$

est bilinéaire et elle est bien de U dans U'. On l'appelle la contraction par rapport à i et j.

Définition 2.4.6 *Soit $p \in M^n$. Il y a deux éléments de $\Omega^n(T_pM)$ de norme 1 pour la métrique $<,>_p$ sur T_pM. Mais en prenant une orientation sur M et une base locale de champ de vecteurs $(e_i)_{1\leq i\leq n}$, un seul des 2 éléments de $\Omega^n(T_pM)$ parmi $\sqrt{det(g_{ij})}e_1 \wedge ... \wedge e_n$ et $-\sqrt{det(g_{ij})}e_1 \wedge ... \wedge e_n$ peut être choisi. Soit l'application linéaire $E : \Omega^n(M) \to \mathbb{R}$ qui associe cet élément que nous venons de caractériser à 1. Considérons alors l'application :*

$$\mathcal{E} : \begin{array}{ccc} (T_pM)^* \times \cdots \times (T_pM)^* & \to & \mathbb{R} \\ (\phi_1, \ldots, \phi_n) & \longmapsto & E(\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n) \end{array}$$

dont les composantes dans la base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ sont $\frac{1}{\sqrt{det(g_{ij})_{i,j}}}$ dans le cas où $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est un choix de coordonées orientées positivement et $-\frac{1}{\sqrt{det(g_{ij})_{i,j}}}$ sinon. Evidemment l'intérêt de $\mathcal{E}$ est de rendre compte de l'orientation de M.

Définition 2.4.7 *On appelle courbure de Gauss l'application de M^n dans $\mathbb{R}$ suivante :*

$$K = \tfrac{1}{2^{n/2}n!}.\left[\text{CONTRACTION DE } (\underbrace{\mathcal{R} \otimes ... \otimes \mathcal{R}}_{n/2 \text{ fois}} \otimes \mathcal{E} \otimes \mathcal{E})\right]$$

Dès lors, la définition précédente donne une expression fort utile de K (et en se donnant une base orthonormée):

$$K = \frac{1}{2^{n/2}n!} \sum_{\sigma,\sigma' \in \mathbb{S}_n} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma') R_{\sigma(1)\sigma(2)\sigma'(1)\sigma'(2)} ... R_{\sigma(n-1)\sigma(n)\sigma'(n-1)\sigma'(n)}$$

soit avec $X_i = \frac{\partial}{\partial e_i}$:
$K = \frac{1}{2^{n/2}n!} \sum_{\sigma,\sigma' \in \mathbb{S}_n} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma') <R(X_{\sigma(2)}, X_{\sigma(1)})X_{\sigma'(1)}, X_{\sigma'(2)}>..<R(X_{\sigma(n)}, X_{\sigma(n-1)})X_{\sigma'(n-1)}, X_{\sigma'(n)}>$
Calculons maintenant la quantité $\Omega_{i_1i_2} \wedge ... \wedge \Omega_{i_{n-1}i_n}(X_1, ..., X_n) =$

$$= \frac{\left(2\times\frac{n}{2}\right)!}{(2!)^{n/2}} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in\mathbb{S}_n} \varepsilon(\sigma) <R(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)})X_{i_2}, X_{i_1}>...<R(X_{\sigma(n-1)}, X_{\sigma(n)})X_{i_n}, X_{i_{n-1}}>$$
$$= \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{\sigma\in\mathbb{S}_n} \varepsilon(\sigma) <R(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)})X_{i_2}, X_{i_1}>...<R(X_{\sigma(n-1)}, X_{\sigma(n)})X_{i_n}, X_{i_{n-1}}>$$

Par ailleurs, si $\Omega(p)$ désigne la matrice $(\Omega_{ij}(p))_{i,j}$ en $p \in M$,
$Pf(\Omega) = \frac{1}{2^{n/2}(n/2)!} \sum_{\sigma\in\mathbb{S}_n} \varepsilon(\sigma)\Omega_{\sigma(1)\sigma(2)}...\Omega_{\sigma(n-1)\sigma(n)} = \frac{1}{2^{n/2}(n/2)!} \sum_{\sigma\in\mathbb{S}_n} \varepsilon(\sigma)\Omega_{\sigma(1)\sigma(2)} \wedge ... \wedge \Omega_{\sigma(n-1)\sigma(n)}$
et ainsi, si l'on note dV la forme volume canonique :

$$KdV = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in\mathbb{S}_n} \varepsilon(\sigma)\Omega_{\sigma(1)\sigma(2)}...\Omega_{\sigma(n-1)\sigma(n)}$$

soit encore :

$$K(p)dV = \frac{2^{n/2}(n/2)!}{n!} Pf(\Omega(p))$$

On peut prouver que l'expression de $K = K_n$ pour $n = 2$ redonne l'expression bien connue de la coubure de Gauss pour une surface et vérifie la proposition n°9.

3 Théorème de Gauss-Bonnet-Chern

Le but du premier paragraphe est de donner les outils nécessaires pour relier caractéristique d'Euler et courbure de Gauss. Pour cela nous sommes amenés à nous intéresser aux fibrés universaux et aux fibrés principaux.

3.1 Grassmanniennes et Fibrés Universaux

Définition 3.1.1 *La n-grassmannienne d'un espace vectoriel E, notée $G_n(E)$ est l'ensemble de ses sous-espaces vectoriels de dimension n.*

Il est clair que l'action naturelle de $GL_N(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^N$ donne une action transitive sur $\mathrm{G}_n(\mathbb{R}^N)$ (ensemble parfois noté $G_{n,N}$).

Si l'on considère le sous-groupe $T_{n,N}$ formé des applications linéaires de $\mathbb{R}^N$ qui laissent stable le plan P_0 engendré par les n premiers vecteurs de la base canonique, alors tout élément de $T_{n,N}$ a une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

où A et C sont des matrices de $GL_n(R)$ et $GL_{N-n}(R)$ respectivement et B une matrice $n \times (N-n)$. Dès lors, on voit que $G_n(\mathbb{R}^N)$ est en bijection avec la variété quotient $GL_N(\mathbb{R})/T_{n,N}$ et en hérite une structure de variété lisse.
D'un autre côté, on peut considérer le produit scalaire naturel sur $\mathbb{R}^n$ et faire opérer le groupe orthogonal sur $G_n(\mathbb{R}^N)$. L'action est toujours transitive car tout système orthonormé de vecteurs peut être complété en une base orthonormée. Si $g \in O(n)$ laisse le plan P_0 stable alors g est de la forme

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

où $A \in O(n)$, $C \in O(N-n)$ et dans ces conditions, $G_n(\mathbb{R}^N)$ apparaît comme

$$O(N)/O(n) \times O(N-n)$$

On peut démontrer que les deux représentations de $G_n(\mathbb{R}^N)$ que nous venons de donner sont en fait identiques.

Sur la variété $G_n(\mathbb{R}^N)$, nous allons voir qu'il existe un fibré vectoriel naturel de dimension n, que nous noterons $\gamma^n(\mathbb{R}^N)$. Prenons pour espace total de ce fibré l'ensemble $E(\gamma^n(\mathbb{R}^N)) := \{(W,w) \in G_n(\mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}^N | w \in W\}$, pour projection $\pi : E(\gamma^n(\mathbb{R}^N)) \to G_n(\mathbb{R}^N)$ avec $\pi((W,w)) = W$. Alors, la fibre $\pi^{-1}(W)$ sera juste $\{(W,w)|w \in W\}$. Bien sûr, $\pi^{-1}(W)$ dispose d'une structure naturelle d'espace vectoriel induite de celle de $W \subset \mathbb{R}^N$. Enfin, si $W \in G_n(\mathbb{R}^N)$, alors on peut définir l'application ϑ

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \to & U \times W \simeq U \times \mathbb{R}^n \\ (V,v) & \mapsto & (V,p(v)) \end{array}$$

où $U = \{V \in G_n(\mathbb{R}^N) | V \cap W^\perp = \{0\}\}$ et p désigne la projection $\mathbb{R}^n \to W$. Clairement, ϑ est un difféomorphisme et un isomorphisme sur chaque fibre, ce qui permet d'affirmer la proposition suivante :

Proposition 3.1 *$\gamma^n(\mathbb{R}^N)$ est un fibré vectoriel sur $G_n(\mathbb{R}^N)$.*

Soit maintenant M une variété compacte de dimension n. On sait que l'on peut considérer M comme une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ pour N assez grand par le théorème de Whitney. Dans ces conditions, considérons $f : M \to G_n(\mathbb{R}^N)$ où $f(p) = \{V \subset \mathbb{R}^N | V$ est parallèle à $T_pM\}$ et $g : TM \to E(\gamma^n(\mathbb{R}^N))$ où $g(v_p) = (f(p), v)$. Alors (f, g) est une fibration du fibré tangent sur le fibré $\gamma^n(\mathbb{R}^N)$. Ainsi, on obtient tout de suite que $TM \simeq f^*(\gamma^n(\mathbb{R}^N))$.
Le prochain théorème généralise ce résultat à tous les fibrés.

Théorème 14 *Soit $\xi := \pi : E \to X$ un fibré de dimension n sur une variété C^∞ compacte X. Alors, pour N assez grand, il existe une application lisse $f : X \to G_n(\mathbb{R}^N)$ telle que $\xi \simeq f^*(\gamma^n(\mathbb{R}^N))$.*

▶ Soit $(U_i)_{i\leq r}$ un recouvrement ouvert de X tel que $\xi|U_i$ est triviale. Nous obtenons, par projection, des isomorphismes sur chaque fibre :

$$\tau_i : \pi^{-1}(U_i) \to \mathbb{R}^n$$

Soient maintenant deux recouvrements ouverts $(V_i)_{i\leq r}$ et $(W_i)_{i\leq r}$ (leur existence est justifiée par la topologie de X) tels que $\overline{V_i} \subset U_i$ et $\overline{W_i} \subset V_i$. On définit $\phi_i : X \to \mathbb{R}$ lisse qui prend la valeur 1 sur $\overline{W_i}$ et 0 en dehors de V_i. Par ailleurs, soit $\tau'_i : E \to \mathbb{R}^n$ avec

$$\tau'_i(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } \pi(e) \notin V_i \\ \phi_i(\pi(e))\tau_i(e) & \text{si } \pi(e) \in V_i \end{cases}$$

On remarque que les τ'_i sont linéaires sur chaque fibre, mais non injectives. Posons alors,

$$T : E \to \mathbb{R}^n \oplus ... \oplus \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{rn}$$

avec

$$T(e) = (\tau'_1(e), ..., \tau'_r(e))$$

Alors T est linéaire et injective sur toutes les fibres et chaque $T(\pi^{-1}(x))$ est un $n-$plan de $\mathbb{R}^{rn}$. On définit les applications $f : X \to G_n(\mathbb{R}^{rn})$ et $g : E \to E(\gamma^n(\mathbb{R}^{rn}))$ par

$$\begin{aligned} f(x) &= T(\pi^{-1}(x)) = \{T(e) : e \in \pi^{-1}(x)\} \in G_n(\mathbb{R}^{rn}) \\ g(e) &= (f(\pi(e)), T(e)) \in E(\gamma^n(\mathbb{R}^{rn})) \end{aligned}$$

et l'on peut vérifier que (f, g) constitue une fibration de ξ sur $\gamma^n(\mathbb{R}^{rn})$. ■

Remarque 10 *On peut généraliser cette étude à $G_n(\mathbb{R}^\infty) := \bigcup_{k\geq 0} G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ muni d'une topologie faible qui ne permet pas en revanche de disposer d'une structure de variété. Cependant il existe sur cet ensemble un fibré naturel γ^n défini de manière analogue à ce que nous venons de faire plus haut. Ses propriétés remarquables lui ont valu le nom de fibré universel, dénomination que nous adopterons dans le cadre des fibrés $\gamma^n(\mathbb{R}^N)$.*

Nous allons généraliser notre propos aux fibrés orientés. Une orientation pour un fibré $\xi := \pi : E \to X$ est une collection $\{\mu_x\}$ d'orientations −compatibles− sur les fibres $\pi^{-1}(x)$. Un fibré orienté est un couple (ξ, μ) où μ est une orientation pour ξ. Dans ces conditions on peut définir la grassmannienne orientée $\widehat{G}_n(\mathbb{R}^N)$ comme l'ensemble de tous les sous-espaces de dimension n orientés de $\mathbb{R}^N$. Il y a bien sûr une application naturelle $\tau : \widehat{G}_n(\mathbb{R}^N) \to G_n(\mathbb{R}^N)$ définie par $\tau((W,\mu)) = W$ et l'on peut démontrer que $\widehat{G}_n(\mathbb{R}^N)$ est une variété. Le fibré universel correspondant sera alors $(\widehat{\gamma}^n(\mathbb{R}^n), \widehat{\mu})$ avec pour espace total $E(\widehat{\gamma}^n(\mathbb{R}^n)) = \{((W,\mu), w) \in \widehat{G}_n(\mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}^N | w \in W\}$ et $\pi((W,\mu), w) = W$ et l'orientation naturelle $\widehat{\mu}$ sur $\pi^{-1}((W,\mu))$ induite par celle de W. De ce que nous avons démontré précédemment découle le théorème suivant :

Théorème 15 *Soit $\xi := \pi : E \to X$ un fibré d'orientation μ, de dimension n sur une variété C^∞ compacte X. Alors, pour N assez grand, il existe une application lisse $f : X \to \widehat{G}_n(\mathbb{R}^N)$ telle que $(\xi,\mu) \simeq f^*(\widehat{\gamma}^n(\mathbb{R}^N), \widehat{\mu})$.*

Voilà une dernière proposition sur les fibrés universaux qui nous sera utile pour la suite :

Proposition 3.2 *Si $n = 2m$ pair, alors $\forall N > n$,*

$$\chi(\widehat{\gamma}^n(\mathbb{R}^N)) \neq 0$$

▶ En reprenant ce que l'on a dit au théorème n°14, on obtient que

$$\chi(TS^n) = \chi(f^*(\widehat{\gamma}^n(\mathbb{R}^N)))$$

où f est en fait une équivalence d'après la remarque suivant la proposition n°3.1. On utilise alors le théorème n°13 qui assure que $\chi(TS^n) = (\chi(S^n))\,\nu$ où ν est l'orientation de S^n. Comme $\chi(S^n) = 2$, on peut conclure grâce à la proposition n°1.6. ■

3.2 Le Fibré Principal

Soit M une variété et $F(M)$ l'ensemble de toutes les bases u sur tout espace tangent T_pM. On appelle $F(M)$ le "fibré" des bases de M, et on définit $\pi : F(M) \to M$ l'application qui associe à u l'élément $p = \pi(u) \in M$. Si bien sûr on se donne (x^i) un système de coordonnées sur $U \subset M$ ouvert, alors on peut représenter de façon unique chaque base $u = (u_i)_{i \leq n}$ de T_pM par

$$u_j = \sum_{i=1}^{n} x^i_j(u) \frac{\partial}{\partial x^i} |_{\pi(u)}$$

et ainsi l'application $x_\# : u \mapsto (x^i(\pi(u)), x^i_j(u)) \in \mathbb{R}^n \times GL(n,\mathbb{R})$ est injective. En fait, il est possible de voir que $F(M)$ peut être munie d'une structure de variété C^∞ qui rende difféomorphe l'application $x_\#$ et C^∞ l'application π. En fin de compte, nous obtenons une application de classe C^∞ de $F(M) \times GL(n,\mathbb{R})$ dans $F(M)$ donnée par $(u, A) \mapsto u \cdot A$ où $(u \cdot A)_i = \sum_j A^i_j u_j$. On a $u \cdot A = A$ si et seulement si $A = I$, et l'ensemble de tous les $u \cdot A$ avec $A \in GL(n,\mathbb{R})$ est juste $\pi^{-1}(\pi(u))$. $F(M)$ n'est évidemment pas un fibré vectoriel car alors les fibres $\pi^{-1}(p)$ seraient difféomorphes à $GL(n,R)$, ni un groupe de Lie, mais tout de même une sorte de "fibré", que nous allons définir.

Définition 3.2.1 *Soit M une variété C^∞ et G un groupe de Lie. Un fibré principal sur M de groupe G est un triplet $(P, \pi, \cdot)$ où*

1. *P est une variété (dit l'espace total du fibré principal)*
2. *$\pi : P \to M$ est une application C^∞ (la projection du fibré) sur M (l'espace de base du fibré principal) et qui satisfait :*
$$\pi(u \cdot a) = \pi(u) \qquad \forall u \in P, \forall a \in G$$
3. *L'application $\cdot$ (action de G) est une application C^∞, $(u, a) \mapsto u \cdot a$ de $P \times G \to P$ avec*
$$u \cdot (ab) = (u \cdot a) \cdot b \qquad \forall u \in P, \forall a, b \in G$$
telle que la condition suivante de "trivialisation locale" soit possible :
"Pour tout $p \in M$, il y a un voisinage U de p et un difféomorphisme $t : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ de la forme
$$t(u) = (\pi(u), \phi(u))$$
avec ϕ satisfaisant $\phi(u \cdot a) = \phi(u) \cdot a$."

Comme $\pi(u \cdot a) = \pi(a)$ on voit que $\{u \cdot a : a \in G\} \subset \pi^{-1}(\pi(u))$. Avec la propriété $\phi(u \cdot a) = \phi(u) \cdot a$, on a alors que en fait $\{u \cdot a : a \in G\} = \pi^{-1}(\pi(u))$. Si v satisfait $\pi(v) = \pi(u)$ et $\phi(v) = \phi(u)a$ pour $a \in G$, alors $\phi(v) = \phi(u \cdot a)$ et $\pi(v) = \pi(u \cdot a)$, donc $v = u \cdot a$. Enfin $u \cdot a = u$ pour $u \in P \Rightarrow a = e$.

Exemple 9 *Le plus simple des fibrés principaux est $M \times G$ avec $\pi : M \times G \to M$ la projection selon le premier facteur et $(p, a) \cdot b = (p, ab)$. Il se nomme le fibré principal trivial de groupe G.*

Exemple 10 *Soit $\pi : E \to M$ un fibré vectoriel. On pose $O(E) = \{u$ base orthonormée de $\pi^{-1}(p), \forall p \in M\}$. C'est un fibré principal de groupe $O(n)$. $\pi : S^1 \times \mathbb{R} \to S^1$fibré vectoriel; alors toute fibre de $O(S^1 \times \mathbb{R})$ a deux points exactement : ce sont les deux classes d'équivalence des vecteurs définissant les deux orientations possibles de T_pS^1 $\forall p$ avec $O(1) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et l'élémént non nul change l'orientation.*

Exemple 11 *On pose $SO(E) = \{u$ base orthonormée orientée positivement$\}$ où $\pi : E \to M$ est un fibré vectoriel de M de dimension 2. Alors $\forall p \in M$, $\pi^{-1}(p) \cong S^1$.*

Nous allons maintenant définir la notion de connexion sur un fibré principal.

Définition 3.2.2 *Soit $\mathfrak{G}$ l'algèbre de Lie du groupe de Lie G agissant sur M à droite. Pour tout $X \in \mathfrak{G}$ on a la courbe $t \mapsto exp(tX)$ dans $\mathfrak{G}$ et on considère pour $p \in M$, $c_p : t \mapsto p \cdot exp(tX) = R_{exp(tX)}(p)$. On note $c_p'(0) = \sigma(X)(p) = \frac{d}{dt}\left(p \cdot exp(tX)\right)_{|t=0}$ et ainsi on a un champ de vecteurs $\sigma(X)$ sur M. Le groupe local à un paramétre engendré par $\sigma(X)$ est $\varphi_t(p) = p \cdot (exptX)$. $\sigma(X)$ est appelé le champ de vecteurs fondamental.*

Proposition 3.3 *Soit $p \in M$. On pose :*

$$\sigma_p : \begin{array}{ccc} G & \to & M \\ a & \mapsto & p \cdot a \end{array}$$

Alors $\sigma(X)(p) = \sigma_{p*}(X)$.

Remarque 11 *Par définition, $\sigma_{p*}(X)_y = d_{\sigma_p^{-1}(y)}\sigma_p(X_{\sigma_p^{-1}(y)})$.*

► $\sigma(X)(p) = \frac{d}{dt}(p \cdot exp(tX))_{|t=0} = \frac{d}{dt}R_{exp(tX)}(p)_{|t=0} = \frac{d}{dt}\sigma_p(exp(tX))_{|t=0}$. ■

Remarque 12 *$\sigma(X)$ est une application linéaire qui est conservée par le crochet, id est : $[\sigma(X), \sigma(Y)] = \sigma[X, Y]$, et surtout, $\forall p$ $X \mapsto \sigma(X)(p)$ est un isomorphisme sur $\mathfrak{G}$.*

Définition 3.2.3 *Une connexion d'Ehresmann ∇ sur un fibré principal $\pi : P \to M$ de groupe G sur une variété lisse M est une $1-$forme C^∞ de P sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ du groupe de Lie G telle que :*

$$\begin{array}{lll} \nabla(\sigma(X)) = X & \forall X \in \mathfrak{G} & (1) \\ \nabla(R_{g*}Y) = Ad_{g^{-1}}\nabla(Y) & \forall u \in P, \forall Y \in T_uP, \forall g \in G & (2) \end{array}$$

Si ∇ est une connexion d'Ehresmann, $\forall u \in P$ soit $\nabla(u) : T_uP \to \mathfrak{G}$ qui est surjective.

Définition 3.2.4 *On appellera sous-espace horizontal en u, le sous-espace vectoriel $H_u = Ker\nabla_u$ de T_uP de même dimension que M (et les vecteurs tangents à H_u seront dits horizontaux).*

Par ailleurs, en retournant à la définition d'un fibré principal, on peut remarquer que toute fibre est clairement difféomorphe à G, le groupe agissant sur M. Soit $u \in P$. On pose $p = \pi(u) \in M$ et on regarde l'inclusion canonique $i : \pi^{-1}(p) \to P$ ou encore $i : \pi^{-1}(\pi(u)) \to P$. $\pi^{-1}(p) = \pi^{-1}(\pi(u)) \subset P$ et ainsi $T_u\pi^{-1}(p) = T_u\pi^{-1}(\pi(u)) \subset T_uP$ trivialement et bien sûr, $T_u\pi^{-1}(p)$ est l'image par i de l'espace tangent de $\pi^{-1}(p)$ dans T_uP. C'est un sous-espace de T_uP : on l'appelle le sous-espace vertical en u et ses éléments s'appellent des vecteurs tangents verticaux en u. On note alors $T_u(\pi^{-1}(\pi(u)) = V_u$.

Proposition 3.4 *Avec les notations induites précédemment, on a $T_uP = V_u \oplus H_u$.*

► Evident. ■
Ainsi, $\forall Y \in T_uP$,

$$Y = Y^\perp + \overline{Y}$$

où $Y^\perp$ est la composante verticale de Y et $\overline{Y}$ sa composante horizontale. Nous admettrons que si la variété M est localement compacte dénombrable à l'infini, alors il existe toujours une connexion ∇ de la forme Ehresmann et c'est cette forme de connexion que nous utiliserons dans la suite car elle posséde des caractéristiques d"'invariance sur $\mathfrak{G}$" données par *(1)* et *(2)* qui sont fondamentales pour la suite.

Remarque 13 *Si on a $\pi : P \to M$ et $\pi_* : T_uP \to T_{\pi(u)}M$ alors on a que $V_u = Ker(\pi_*)$.*

Remarque 14 *Si* $(X_i)_{1\leq i\leq k}$ *est une base de* $\mathfrak{G}$ *alors* $\exists\omega^i$ *tel que* $\nabla = \sum_i \omega^i X_i$ *avec* ω^i *des formes différentielles ordinaires (i.e à valeurs dans* $\mathbb{R}$*) sur* P*. On retrouve ainsi les résultats énoncés sur le fibré tangent en ce qui concerne la forme de courbure.*

Nous allons commencer par donner des propriétés générales sur les fibrés principaux avant de nous intéresser à celui associé au groupe $SO(n)$.

Lemme 3.1 *Soit* ξ *un fibré principal défini sur* $M\times[0,1]$*. Alors tout point* x *de la variété* M *possède un voisinage* U *tel que* ξ *est le fibré trivial sur* $U\times[0,1]$*.*

▶ Chaque point $(x,t)\in\{x\}\times[0,1]$ a un voisinage $V\times W$ tel que ξ est trivial sur $V\times W$. Par compacité un nombre fini de voisinages $V_1\times W_1,...,V_r\times W_r$ recouvrent $\{x\}\times[0,1]$. Supposons que le résultat du lemme soit vrai sur $U=V_1\cap...\cap V_r$. Pour $r=1$, c'est trivial. Au rang r, choisissons un point $t_0\in[0,1]$ tel que $[0,t_0]$ et $[t_1,1]$ soient chacuns recouverts par au plus $r-1$ ensembles $V_i\times W_i$. Alors par hypothèse de récurrence, ξ est trivial sur des ensembles $U_1\times[0,t_0]$ et $U_2\times[t_0,1]$. Ceci signifie qu'il y a une section s de ξ sur $U_1\times[0,t_0]$ et une section s' de ξ sur $U_2\times[t_0,1]$ et que l'on a sur $(U_1\cap U_2)\times\{t_0\}$:

$$s(x,t_0)=s'(x,t_0)\cdot a(x)$$

pour une application continue $x\mapsto a(x)\in G$. On peut alors définir une section $\overline{s}$ sur $(U_1\cap U_2)\times[0,1]$ par

$$\overline{s}(x,t)=\begin{cases} s(x,t) \text{ pour } 0\leq t\leq t_0 \\ s'(x,t)\cdot a(x) \text{ pour } t_0\leq t\leq 1\end{cases}$$

ce qui permet de conclure. ■

Théorème 16 *Soit* $\xi := \pi : P\to M\times[0,1]$ *un fibré principal,* M *étant une variété quelconque. Alors, on a:*

$$\xi\simeq p^*j^*\xi$$

où $j : M\times\{1\}\to M\times[0,1]$ *est l'inclusion naturelle et* $p : M\times[0,1]\to M\times\{1\}$ *associe* (x,t) *à* $(x,1)$*.*

▶ Il s'agit de montrer qu'il existe une fibration $\widetilde{p} : P\to\pi^{-1}(X\times\{1\})$ qui recouvre p. Mais par le lemme, il existe un recouvrement de M par des ouverts $\{U_\alpha\}$ tels que ξ est trivial sur $U_\alpha\times[0,1]$. On sait que l'on peut choisir une partition de l'unité $\{\phi_\alpha\}$ subordonnée à $\{U_\alpha\}$. Soit s_α une section de ξ sur $U_\alpha\times[0,1]$. Considérons alors l'application :

$$\begin{array}{rcl}\pi^{-1}(U_\alpha\times[0,1]) & \to & \pi^{-1}(U_\alpha\times[0,1]) \\ s_\alpha(t) & \longmapsto & s_\alpha(x,min(t+\phi_\alpha(x),1))\end{array}$$

Cette application est l'identité sur $\partial U_\alpha\times[0,1]$ donc on peut l'étendre continûment à $M\times[0,1]$ en en faisant l'identité sur $(M-U_\alpha)\times[0,1]$. On obtient ainsi une fibration $\widetilde{p_\alpha} : P\to P$ de ξ sur une restriction de ξ dépendant de ϕ_α. Alors $\widetilde{p}:=\widetilde{p_1}\circ\widetilde{p_2}\circ...$ est la fibration adéquate. ■

Corollaire 3.1 *Si* ξ *est un fibré principal sur* $M\times[0,1]$ *alors*

$$i_0^*\xi\simeq i_1^*\xi$$

où $i_t(x) : M\to M\times[0,1]$ *telle que* $i_t(x)=(x,t)$*.*

▶ Soit $q : M \times [0,1] \to M$ la projection $q(x,t) = x$. Alors $j \circ p = i_1 \circ q$. Le théorème n°16 assure que

$$\xi \simeq p^* j^* \xi \simeq (j \circ p)^* \xi \simeq q^* i_1^* \xi$$

Mais par ailleurs $q \circ i_0 = Id$. Ainsi,

$$i_0^* \xi \simeq i_0^* q^* i_1^* \xi \simeq [i_1 \circ (q \circ i_0)]^* \xi \simeq i_1^* \xi$$

D'où le résultat. ■

Si $\xi := \pi : E \to M$ est un C^∞ fibré vectoriel sur M muni d'une métrique riemannienne, on peut prendre $O(E)$ –l'ensemble de toutes les bases orthonormales de l'espace vectoriel $\pi^{-1}(p)$ pour tout $p \in M$– comme fibré principal sur M de groupe $O(n)$. La projection $\varpi : O(E) \to M$ associe dans ce cas une base u de $\pi^{-1}(p)$ à $\varpi(u) = p$. Si le fibré $\xi := \pi : E \to M$ est orienté alors ces constructions peuvent être modifiées pour donner le fibré principal $SO(E)$ associé aux bases orthonormales orientées positivement. Il est maintenant temps de constater que l'application $\cdot : P \times G \to P$ (ici avec $P = E$) est une action (sans points fixes) de G sur P à droite au sens de la définition n°2.2.6. On peut donc reconsidérer dans le cadre du fibré principal $SO(E)$ ce que l'on a dit sur les groupes et algèbres de Lie.

Proposition 3.5 *Soit M^n variété de dimension paire $n = 2m$. Si $<,>$ est une métrique riemannienne pour le fibré vectoriel $\xi := \pi : E \to M$ de dimension n et si ∇ est une connexion sur le fibré principal correspondant $\varpi : SO(E) \to M$, alors –en reprenant les notations du paragraphe sur les tenseurs– il existe une unique n-forme Λ sur M^n telle que :*

$$\varpi^*(\Lambda) = \sum_{\sigma \in S^n} \varepsilon(\sigma) \Omega_{\sigma(1)\sigma(2)} \wedge ... \wedge \Omega_{\sigma(n-1)\sigma(n)} = 2^m m! Pf(\Omega)$$

$\varpi^*(\Lambda)$ étant une n-forme définie sur le fibré $SO(E)$.

▶ Soient $X_1, ..., X_p \in T_pM$. Soit $u \in \varpi^{-1}(p)$ et soient $Y_1, ..., Y_n \in SO(E)_u$ des vecteurs tangents en u avec $\varpi_*(Y_i) = X_i$. L'unicité de Λ est évidente en vue de ce que l'on impose comme condition. Montrons l'existence de Λ. Si $Z_i \in SO(E)_u$ avec $\varpi_*(Z_i) = X_i$, alors $\varpi_*(Y_i - Z_i) = 0$ et tous les $Y_i - Z_i$ sont othogonaux. Mais $\Omega(A,B) = 0$ si A est orthogonal à B. Donc, $Pf(\Omega)(Y_1, ..., Y_n) = Pf(\Omega)(Z_1, Y_2, ..., Y_n) = ... = Pf(\Omega)(Z_1, ..., Z_n)$.
Ceci prouve que Λ ne dépend pas du choix de Y_i. Maintenant, si l'on choisit $u' \in \varpi^{-1}(p)$ avec $u' \neq u$. Alors on sait qu'il existe $A \in SO(n)$ telle que $u' = R_A(u) = u \cdot A$ et l'on peut choisir les $Y_i' \in SO(E)_{u'}$ tels que $Y_i' = R_{A*} Y_i$. On obtient alors :

$$Pf(\Omega)(Y_1', ..., Y_n') = Pf(\Omega)(R_{A*}Y_1, ..., R_{A*}Y_n) = Pf(A^{-1}\Omega A)(Y_1, ..., Y_n) = Pf(\Omega)(Y_1, ..., Y_n)$$

d'après les propriétés du Pfaffien et de la représentation adjointe pour $G = SO(n)$. D'où l'existence de Λ, et l'expression de K_n donne directement dans le cas du fibré tangent que $\Lambda = n! K_n dV$. ■

Définition 3.2.5 *Considérons une k-forme α à valeurs dans un espace vectoriel V. On définit une (k+1) forme à valeurs dans V appelée différentiation covariante par :*

$$D\alpha(Y_1, ...Y_{k+1}) = (d\alpha)(\overline{Y_1}, ..., \overline{Y_k})$$

où $\overline{Y_i}$ est la composante horizontale de Y.

Proposition 3.6 *On peut abréger la deuxième équation de structure de Cartan en*

$$d\omega = -\omega \wedge \omega + \Omega \tag{1}$$

et dans ces conditions, on obtient la seconde identité de Bianchi :

$$D\Omega = 0$$

▶ $D\Omega$ est une 3-forme et $D\Omega(X,Y,Z) = d\Omega(\overline{X},\overline{Y},\overline{Z}) = (d\omega \wedge \omega)(\overline{X},\overline{Y},\overline{Z}) - (\omega \wedge d\omega)(\overline{X},\overline{Y},\overline{Z})$ en appliquant d à (1). Le résultat vient du fait que $\omega(X) = 0$ pour $X \in H_u$ d'après les propriétés d'une connexion de Ehresmann. ■

Proposition 3.7 *La forme* Λ *est fermée :* $d\Lambda = 0$.

Soient $X_1, ..., X_{n+1} \in T_pM$, $u \in \varpi^{-1}(p)$ et $Y_1, ..., Y_{n+1} \in SO(E)_u$ avec $\varpi_*(Y_i) = X_i$. Notons $\overline{Y_i}$ la composante horizontale de Y_i. Alors,

$$\begin{aligned}
d\Lambda(X_1, ..., X_{n+1}) &= d\Lambda(\varpi_*(Y_1), ..., \varpi_*(Y_{n+1})) \\
&= d\Lambda(\varpi_*(\overline{Y_1}), ..., \varpi_*(\overline{Y_{n+1}})) \\
&= (\varpi^*(d\Lambda))(\overline{Y_1}, ..., \overline{Y_{n+1}}) \\
&= d(\varpi^*(\Lambda))(\overline{Y_1}, ..., \overline{Y_{n+1}}) \\
&= 2^m m! d(Pf(\Omega))(\overline{Y_1, ..., Y_{n+1}}) \\
&= 2^m m! D(Pf(\Omega))(Y_1, ..., Y_{n+1})
\end{aligned}$$

et la seconde identité de Bianchi permet de conclure. ■

Proposition 3.8 *La classe de cohomologie* $[\Lambda]$ *est indépendante de la métrique* $<,>$ *et de la connexion* ∇.

▶ Soient deux métriques $<\ ,\ >$ et $<\ ,\ >'$ sur le fibré vectoriel $\xi := \pi : E \to M$. Alors, si nous notons $SO(E)$ et $SO(E)'$ les fibrés principaux correspondants, nous pouvons affirmer qu'ils sont équivalents. En effet, soit $q : M \times [0,1] \to M$ la projection $q(x,t) = x$; considérons alors le fibré $q^*\xi$ sur $M \times [0,1]$. La fibre de $q^*\xi$ sur (x,t) est par définition l'ensemble $\{(x,t)\} \times \pi^{-1}(x)$. Les produits scalaires $<\ ,\ >_x$ et $<\ ,\ >'_x$ induits sur $\pi^{-1}(x)$ nous donnent un produit scalaire toujours sur $\pi^{-1}(x)$:

$$t <,>_x + (1-t) <,>'_x$$

pour $t \in [0,1]$. C'est ce produit scalaire sur chaque fibre $\{(x,t)\} \times \pi^{-1}(x)$ que nous utiliserons pour définir une métrique riemanienne $<\ ,\ >$ sur $q^*\xi$ qui permet alors de considérer le fibré principal $SO(q^*\xi)$. Avec toujours $i_t : M \to M \times [0,1]$ telle que $i_t(x) = (x,t)$, nous avons :

$$i_0^*SO(q^*\xi) \simeq SO(E) \text{ et } i_1^*SO(q^*\xi) \simeq SO(E)'$$

et ainsi $SO(E) \simeq SO(E)'$ par la proposition n°3.1.
Considérons $g : SO(E) \to SO(E')$ cette équivalence qui commute sous l'action de $SO(n)$:

$$g(u \cdot a) = g(u) \cdot a$$

pour tout $u \in E$ et $a \in SO(n)$. Alors pour toute connexion ∇ sur $SO(E)$, $\nabla' = g^*\nabla$ est une connexion sur $SO(E)'$ et l'on peut voir que l'on a aussi :

$$\Omega' = g^*\Omega \quad \text{et} \quad Pf(\Omega') = g^*Pf(\Omega)$$

Dès lors les n-formes Λ et Λ' sont égales.
Montrons maintenant l'invariance selon la connexion. Si ∇_0 et ∇_1 sont deux connexions sur le même fibré principal $SO(E)$ alors, il s'agit de montrer que $\Lambda_0 - \Lambda_1$ est exacte. Il est évident que la projection q induit deux connexions $q^*\nabla_0$ et $q^*\nabla_1$ sur $q^*SO(E)$. Soit $i' : M \times [0,1] \to [0,1]$ définie par $i'(p,t) = t$ et soit la connexion sur $q^*SO(E)$:

$$\nabla = (1 - i')(q^*\nabla_0) + i'(q^*\nabla_1)$$

qui induit la forme de connexion Ω. Dès lors on peut indentifier ∇_0 avec $i_0^*(\nabla)$ et ∇_1 avec $i_1^*(\nabla)$. En appliquant la proposition n°3.5, il existe une n-forme Λ fermée sur $M \times [0,1]$ avec $\varpi^*(\Lambda) = 2^m m! Pf(\Omega)$ et $\varpi : q^*SO(E) \to M \times [0,1]$. Alors, on a bien sûr :

$$i_0^*(\Lambda) = \Lambda_0 \text{ et } i_1^*(\Lambda) = \Lambda_1$$

On peut alors appliquer le lemme n°1.3 avec $\varphi_t = i_t$, $t_0 = 0$, $t_1 = 1$. Dès lors $\Lambda_0 - \Lambda_1$ est bien exacte. ■

Définition 3.2.6 *Soit $\xi := E \to M$ un fibré vectoriel orienté de dimension paire. Nous noterons $C(\xi)$ la classe de cohomologie $[\Lambda] \in H^{2m}(M)$ où la n-forme Λ est donnée par la proposition n°3.5.*

Définition 3.2.7 *On étend la définition de $C(\xi)$ en posant $C(\xi) = 0$ si $\xi := \pi : E \to M$ est de dimension impaire.*

Proposition 3.9 *Soit $\xi := \pi : E \to M$ un fibré vectoriel orienté lisse de dimension paire $n = 2m$ sur M. Soit $f : \widetilde{M} \to M$ une application de classe C^∞. Alors*

$$C(f^*\xi) = f^*(C(\xi)) \in H^n(\widetilde{M})$$

► Soit $\widetilde{E}$ l'espace total de $f^*\xi$ et soit $\widetilde{f} : \widetilde{E} \to E$ la fibration recouvrant f.
Si $(x,y) \mapsto < x,y >$ est une métrique sur E, alors $(x,y) \mapsto \widetilde{f}^*(< x,y >)$ est une métrique sur $\widetilde{E}$. On peut trouver un isomorphisme $\overline{f}$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} SO(\widetilde{E}) & \xrightarrow{\overline{f}} & SO(E) \\ \widetilde{\varpi}\downarrow & & \downarrow\varpi \\ \widetilde{M} & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

Si ∇ est une connexion sur $SO(E)$, alors il en va de même de $\overline{f}^*(\nabla)$ sur $SO(\widetilde{E})$, et l'on peut voir que la forme de connexion de courbure correspondante $\widetilde{\Omega}$ vérifie l'égalité :

$$\widetilde{\Omega} = \overline{f}^*(\Omega)$$

D'où $Pf(\widetilde{\Omega}) = Pf(\overline{f}^*\Omega) = \overline{f}^*Pf(\Omega)$. Mais alors si Λ est la solution de la proposition n°3.5, $\widetilde{\varpi}^*(f^*\Lambda) = \overline{f}^*\varpi^*(\Lambda) = 2^m m! \overline{f}^* Pf(\Omega) = 2^m m! Pf(\widetilde{\Omega})$ et par conséquent l'unicité de la solution dans la proposition n°3.5 permet de conclure. ■

Définition 3.2.8 *Soient* $\xi_1 := \pi_1 : E_1 \to M$, $\xi_2 := \pi_2 : E_2 \to M$ *deux fibrés vectoriels. Nous pouvons former la somme directe* $\pi_1^{-1}(x) \oplus \pi_2^{-1}(x)$ *pour tout* $x \in M$.
Soit $E = \underset{x\in X}{\cup} \pi_1^{-1}(x) \times \pi_2^{-1}(x) \subset E_1 \times E_2$ *muni de la topologie induite de* $E_1 \times E_2$ *et soit* $\pi : E \to M$ *l'application qui envoie tous les éléments de* $\pi_1^{-1}(x) \times \pi_2^{-1}(x)$ *sur* x. *Alors* $\xi_1 \oplus \xi_2 : \pi : E \to M$ *est un fibré vectoriel nommé "somme de Whitney de* ξ_1 *et* ξ_2*".*

Proposition 3.10 *Soient* $\xi_1 := \pi_1 : E_1 \to M$, $\xi_2 := \pi_2 : E_2 \to M$ *des fibrés vectoriels orientés sur* M *variété orientée, de dimensions respectives* n_1 *et* n_2. *Si* $n_i = 2m_i$ *alors, avec les notations de la définition n°1.3.2,*

$$C(\xi_1 \oplus \xi_2) = \frac{(m_1 + m_2)!}{m_1!m_2!} C(\xi_1) \smile C(\xi_2)$$

Si n_1 *ou* n_2 *est impair alors* $C(\xi_1 \oplus \xi_2) = 0$.

▶ Soient la métrique riemannienne $<,>_i$ sur ξ_i pour $i = 1, 2$ et soit $<,>$ la métrique $<,>_1 \oplus <,>_2$ sur $\xi_1 \oplus \xi_2 := \pi : E \to M$ avec $E := E_1 \oplus E_2$. Soient les fibrés principaux correspondants $\varpi_i : SO(E_i) \to M$ et $\varpi : SO(E) \to M$. Notons $\rho_i : SO(E_1) * SO(E_2) \to SO(E_i)$ les projections naturelles. Si ∇_i sont les connexions sur $SO(E_i)$ de forme de courbure Ω_i alors

$$\rho_1^* \nabla_1 \oplus \rho_2^* \nabla_2 = \begin{pmatrix} \rho_1^* \nabla_1 & 0 \\ 0 & \rho_2^* \nabla_2 \end{pmatrix}$$

est une connexion ∇' sur $SO(E_1) * SO(E_2)$ de forme de courbure

$$\Omega' = \rho_1^* \Omega_1 \oplus \rho_2^* \Omega_2 = \begin{pmatrix} \rho_1^* \Omega_1 & 0 \\ 0 & \rho_2^* \Omega_2 \end{pmatrix}$$

et l'on peut démontrer que ∇' peut être étendue en une connexion (que nous noterons toujours ∇') sur $SO(E)$ de manière unique. Dès lors

$$Pf(\Omega') = Pf(\rho_1^* \Omega_1) Pf(\rho_2^* \Omega_2) = Pf(\rho_1^* \Omega_1) \wedge Pf(\rho_2^* \Omega_2) = \rho_1^* Pf(\Omega_1) \wedge \rho_2^* Pf(\Omega_2).$$

Si les Λ_i et Λ sont donnés par le résultat de la proposition n°3.5, alors les propriétés du Pfaffien donnent :

$$\begin{array}{rcl} \varpi^*(\Lambda) & = & 2^{m_1+m_2}(m_1 + m_2)! Pf(\Omega') \\ & = & \frac{(m_1+m_2)!}{m_1!m_2!} (2^{m_1} m_1! \rho_1^* Pf(\Omega_1)) \wedge (2^{m_2} m_2! \rho_2^* Pf(\Omega_2)) \\ & = & \frac{(m_1+m_2)!}{m_1!m_2!} \rho_1^* \varpi_1^*(\Lambda_1) \wedge \rho_2^* \varpi_2^*(\Lambda_2) \\ & = & \frac{(m_1+m_2)!}{m_1!m_2!} \varpi^*(\Lambda_1) \wedge \varpi^*(\Lambda_2) \end{array}$$

d'où $\Lambda = \frac{(m_1+m_2)!}{m_1!m_2!} \Lambda_1 \wedge \Lambda_2$ et la conclusion s'impose. ■

Corollaire 3.2 *Soit* $\xi := \pi : E \to M$ *un fibré vectoriel orienté sur une variété* M *orientée, tel qu'une section* s *ne s'annule pas. Alors,*

$$C(\xi) = 0$$

▶ Soient $E_1 := \bigcup_{p\in M} (\mathbb{R}\cdot s(p)) \subset E$ et $E_2 := \bigcup_{p\in M} (R\cdot s(p))^{\perp} \subset E$ (ce qui a un sens avec la métrique riemannienne sur E). Alors $\xi_1 := \pi_{1|_{E_1}} : E_1 \to M$ est un fibré de dimension 1 orienté et $\xi_2 := \pi_{2|_{E_2}} : E_2 \to M$ est aussi orienté. $\xi \simeq \xi_1 \oplus \xi_2$ par définition, donc la dernière proposition assure que $C(\xi) = 0$. ■

Corollaire 3.3 *Si $\xi := \pi : E \to M$ est un fibré vectoriel orienté de dimension paire $n = 2m$ sur une variété compacte orientée M, alors la classe $C(\xi)$ est un multiple de la classe d'Euler $\chi(\xi)$.*

▶ Soit $S = \{\ e \in E|\ < e, e >= 1\}$ et $D = \{\ e \in E|\ < e, e >\leq 1\}$ avec $<,>$ la métrique riemannienne sur ξ. On note $\pi_0 : S \to M$ la restriction de π à S. Voyons que le fibré $\pi_0^*\xi$ dispose d'une section s qui ne s'annule pas : $\forall e \in S$, la fibre au-dessus de e est $\{e\} \times \pi^{-1}(\pi_0(e)) = \{e\} \times \pi^{-1}(\pi(e))$ et l'on peut définir s par $s(e) = (e, e) \in \{e\} \times \pi^{-1}(\pi(e))$ et bien sûr $s(e) \neq (e, 0)$ donc s ne s'annule pas. On peut alors appliquer le dernier corollaire:

$$C(\pi_0^*\xi) = 0$$

Alors la proposition n°3.9 assure que $\pi_0^*C(\xi) = 0$. Par ailleurs, on sait alors que la séquence $H_c^n(D - S) \xrightarrow{\epsilon} H^n(D) \xrightarrow{i} H^n(S)$ est exacte et que $D - S$ est difféomorphe à E. Puisque, $\pi_0^*C(\xi) = 0$, on a que $i^*(\pi_{|D})^*(C(\xi)) = 0$ et ainsi, $(\pi_{|D})^*(C(\xi)) \in Im(\epsilon)$ et comme chaque élément de $H_c^n(D - S)$ est un multiple de la classe de Thom U de ξ, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$(\pi_{|D})^*(C(\xi)) = a.\epsilon(U)$$

et on compose par $\overline{s_0}$ la section nulle de M dans D :

$$C(\xi) = \overline{s_0}^*(\pi_{|D})^*(C(\xi)) = a.\overline{s_0}^*(\epsilon(U)) = a.s_0^*U = a.\chi(\xi)$$

avec s_0 la section nulle de M dans $D - S$ et puisque $\overline{s_0}^*(\pi_{|D})^* = Id_{|H^k(M)}$. ■

Remarque 15 *Puisque $H^n(M)$ est de dimension 1, $C(\pi : TM \to M)$ et $\chi(\pi : TM \to M)$ sont proportionnelles. Mais nous disposons d'un résultat bien plus fort et bien plus général :*

Proposition 3.11 *Pour tout $n = 2m$ entier pair, il existe une constante $A_n \in \mathbb{R}$, telle que pour tout fibré vectoriel $\xi := \pi : E \to M$ de dimension n,*

$$C(\xi) = A_n.\chi(\xi)$$

où M est une variété compacte orientée.

▶ Il suffit de se ramener à aux fibrés universaux orientés $\widehat{\gamma}^n(\mathbb{R}^N)$. En effet, si l'on suppose que la propriété est vraie pour $\widehat{\gamma}^n(\mathbb{R}^N)$ pour $N > n$, alors comme chaque fibré (ξ, μ) de dimension n sur une variété compacte est équivalent à $f^*(\widehat{\gamma}^n(\mathbb{R}^N), \widehat{\mu})$ avec $f : M \to \widehat{G}_n(\mathbb{R}^N)$, on obtient que $C(\xi) = C(f^*(\widehat{\gamma}^n(\mathbb{R}^N)))$ et par la proposition n°3.9,

$$C(\xi) = f^*(C(\widehat{\gamma}^n(\mathbb{R}^N))) = A_n f^*(\chi(\widehat{\gamma}^n(\mathbb{R}^N))) = A_n\chi(\xi)$$

par la proposition n°1.6.
Montrons donc que la propriété est vraie pour les fibrés universaux. D'après le dernier corollaire, ils existent des constantes $A_{n,N}$ telles que

$$C(\widehat{\gamma}^n(\mathbb{R}^N)) = A_{n,N}.\chi(\widehat{\gamma}^n(\mathbb{R}^N)) \tag{$*$}$$

Soit $i : \widehat{G}_n(\mathbb{R}^N) \to \widehat{G}_n(\mathbb{R}^M)$ l'inclusion canonique, et par conséquent, $i^*\widehat{\gamma}^n(\mathbb{R}^M) \simeq \widehat{\gamma}^n(\mathbb{R}^N)$. De nouveau les propositions n°3.9 et n°1.6 donnent :

$$\begin{array}{rcl} C(\widehat{\gamma}^n(\mathbb{R}^N)) & = & i^*C(\widehat{\gamma}^n(\mathbb{R}^M)) \\ \chi(\widehat{\gamma}^n(\mathbb{R}^N)) & = & i^*\chi(\widehat{\gamma}^n(\mathbb{R}^M)) \end{array}$$

et en comparant avec $(*)$, on voit que $A_{n,N} = A_{n,M}$ $\forall N, M > n$ puisque $\chi(\widehat{\gamma}^n(\mathbb{R}^N)) \neq 0$ d'après la proposition n°3.2, et la propriété est vraie pour les fibrés universaux. ■

3.3 Le Théorème de Gauss-Bonnet-Chern

Théorème 17 *Soit $n = 2m$ et M une variété compacte orientée de dimension n. Alors,*

$$\int_M K_n\, dV = \frac{1}{2} Volume(S^n).\chi(M)$$

► Les propositions n°3.5, 3.11 appliquées au fibré tangent donnent succesivement, lorsqu'on note μ la classe fondamentale de M :

$$\left(\int_M K_n\, dV\right)\mu = \left(\frac{1}{n!}\int_M \Lambda\right)\mu = \frac{1}{n!}C(\pi : TM \to M) = \frac{A_n}{n!}\chi(\pi : TM \to M)$$

Mais la constante A_n définie dans la proposition précédente vaut :

$$A_n = \frac{n!}{2}Vol(S^n) = \pi^{\frac{n}{2}}2^n\left(\frac{n}{2}\right)! = \pi^m 2^n m!$$

où $Vol(S^n)$ désigne le volume de la sphère S^n. En effet, si on prend $M = S^n$ pour l'évaluer, on obtient :

$$Vol(S^n) = \frac{A_n}{n!}\chi(S^n) = 2\frac{A_n}{n!}$$

Le théorème est alors acquis en utilisant à nouveau le théorème de Poincaré-Hopf. ■

Remarque 16 *Il existe une version de ce théorème pour les variétés à bord qui s'inspire de cette démonstration.*

Remarque 17 *La preuve du théorème a essentiellement utilisé le fait que si $\xi := \pi : E \to M$ est un fibré et $f : M' \to M$ une application alors $\chi(f^*\xi) = f^*(\chi(\xi))$ et $C(f^*\xi) = f^*(C(\xi))$. Evidemment cela conduit à penser qu'il est intéressant d'étudier les classes qui vérifient de telles propriétés. C'est dans ce but que sont introduites les classes caractéristiques (de dimension k) qui sont définies de la manière suivante : on considère une fonction C qui associe à un n-fibré $\xi := \pi : E \to M$ un élément $C(\xi)$ de $H^k(M)$ tel que si $\xi' := E' \to M'$ est un autre $n-$fibré et (g, f) une fibration de ξ' sur ξ alors*

$$C(\xi') = f^*(C(\xi)) \in H^n(M')$$

On peut retrouver, par le concept des classes caractéristiques, le théorème de Gauss-Bonnet que nous venons d'énoncer (Cf S.S.Chern, "Complex manifolds without potential Theory", Springer).

Remarque 18 *Donnons-nous une variété riemannienne (M^n, g) où l'on impose qu'ils existent des constantes $\delta \in \mathbb{R}$ et $A > 0$ pour lesquelles $\delta A < K < A$ (on parle alors de "δ-pinched" espaces). Alors on dispose des résultats suivants, en liaison avec le théorème de Gauss-Bonnet-Chern : si $\delta > 1/4$ alors M est homéomorphe à S^n et si δ est assez proche de 1, alors M est difféomorphe à S^n.*

Remarquons enfin que nous pouvons trouver des cas simples où le théorème est vérifié. En effet, si l'on considère M une variété produit de la forme $M = M_1 \times M_2$ avec M_1 et M_2 des variétés compactes de dimensions paires (sinon le résultat est évident) m_1 et m_2 respectivement. Les formes de volume dV_{M_i} sont des m_i-formes différentielles et dV_M est une $(m_1 + m_2 = dim\, M)$-forme différentielle. Dès lors $dV_{M_1} \wedge dV_{M_2}$ peut être prise comme une forme de volume sur M.
On sait que la caractéristique d'Euler a la propriété d'être multiplicative, c'est à dire que l'on a :

$$\chi(M) = \chi(M_1)\chi(M_2)$$

Montrons d'un autre côté que l'on peut obtenir :

$$\frac{1}{Vol(S^{m_1+m_2})} \int_M K_M \, dV_M = \frac{1}{Vol(S^{m_1})Vol(S^{m_2})} \int_{M_1 \times M_2} K_{M_1} K_{M_2} \, dV_{M_1} dV_{M_2} \qquad (*)$$

ce qui permettra de conclure en utilisant le théorème de Fubini (M_1 et M_2 sont compactes). Mais nous avons $T(M_1 \times M_2) = TM_1 \times TM_2 = TM$ et ainsi la connexion de Ehresmann ∇ sur $\Gamma(TM)$ est de la forme (∇_1, ∇_2) où ∇_i est la connexion de Ehresmann sur M_i. Soient $(e_i)_{1 \leq i \leq m_1}$ et $(e_i)_{m_1+1 \leq i \leq m_2}$ les bases de TM_1 et TM_2; il est alors évident que la forme de courbure Ω_{ij} de M s'annule si i et j n'appartiennent pas simultanément soit à l'ensemble $\{1, ..., m_1\}$, soit à l'ensemble $\{m_1 + 1, ..., m_2\}$ et ainsi Ω est de la forme :

$$\Omega = \Omega_1 \oplus \Omega_2$$

où Ω_i est la forme de courbure sur M_i. Les propriétés du Pfaffien assurent que $Pf(\Omega) = Pf(\Omega_1) \wedge Pf(\Omega_2)$ et d'après l'expression de la courbure de Gauss en fonction du Pfaffien obtenue à la définition n°2.4.7, il nous suffit de voir que :

$$\frac{1}{Vol(S^{m_1+m_2})} \frac{2^{\frac{m_1+m_2}{2}} \left(\frac{m_1+m_2}{2}\right)!}{(m_1+m_2)!} = \frac{1}{Vol(S^{m_1})Vol(S^{m_2})} \frac{2^{\frac{m_1}{2}} \left(\frac{m_1}{2}\right)!}{(m_1)!} \frac{2^{\frac{m_2}{2}} \left(\frac{m_2}{2}\right)!}{(m_2)!}$$

Mais

$$Vol(S^{m_1+m_2}) = \frac{\pi^{\left(\frac{m_1+m_2}{2}\right)} 2^{(m_1+m_2)} \left(\frac{m_1+m_2}{2}\right)!}{(m_1+m_2)!}$$

et

$$Vol(S^{m_1})Vol(S^{m_2}) = \frac{\pi^{\left(\frac{m_1}{2}\right)} \pi^{\left(\frac{m_2}{2}\right)} 2^{m_1} 2^{m_2} \left(\frac{m_1}{2}\right)! \left(\frac{m_2}{2}\right)!}{(m_1)!\,(m_2)!}$$

et l'on a bien l'égalité $(*)$.

Dans le même esprit, regardons ce qui se passe dans le cas du n-tore. Nous savons que la caractéristique d'Euler du n-tore est nulle. Nous allons montrer que l'on peut trouver une métrique riemannienne plate pour le n-tore, et qu'alors la courbure de Gauss induite

sera nulle. Considérons le tore naturel : c'est une surface de Riemann admettant $\mathbb{C}$ comme revêtement universel, héritant ainsi d'une métrique riemannienne plate $g = dx_1 \circ dx_1 + dx_2 \circ dx_2$. Soit $(\omega_i)_{i=1,2} = (dx_i)_{i=1,2}$ la base duale; la formule de Maurer-Cartan assure que $d\omega_1 = \omega_1^2 \wedge \omega_2$. Or $d\omega_1 = d^2x_1 = 0$ donc, $\omega_1^2 \wedge \omega_2 = 0$ et l'on obtient que $\omega_1^2 = \lambda\omega_2$ et $d\omega_1^2 = 0$. La formule de Gauss s'écrit $d\omega_1^2 = -K\omega_1 \wedge \omega_2$. Mais comme $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$, cela infère que $K = 0$, ce que nous recherchions.
Dans le cas du n-tore, la métrique riemannienne plate induite est de la forme $g = g_1 + ... + g_n$ avec $g_i = dx_{2i-1} \circ dx_{2i-1} + dx_{2i} \circ dx_{2i}$ et l'on refait le même raisonnement que précédemment mais avec cette fois-ci $g = dx_1 + ... + dx_n$. Le théorème de Gauss-Bonnet est là encore vérifié.

Nous allons maintenant regarder quelques exemples d'utilisation du théorème de Gauss-Bonnet. Considérons une isométrie du tore sur le tore muni de la métrique habituelle (on pourra plus tard considérer non pas le tore, mais la sphère S^2) qui n'a que des points fixes isolés. Quel est le nombre maximal de points fixes d'une telle application ? Le théorème des points fixes de Lefschetz-Hopf donne une solution à cette question. Pour cela, introduisons une nouvelle notion :

Définition 3.3.1 *Soit f un endomorphisme de complexe de chaines. Le nombre de Lefschetz est donné par $L(f) = \sum_q (-1)^q tr(f_*)$ où $f_* : H_i(C_*, \mathbb{K}) \to H_i(C_*, \mathbb{K})$ est l'application induite par f au niveau de l'homologie. Si $f = Id$, on retrouve la notion de caractéristique d'Euler.*

Le théorème de Lefschetz-Hopf assure que si M^n est une variété compacte munie d'une métrique riemannienne et si $f : M^n \to M^n$ est une isométrie alors

$$L(f) = \chi(Fix\, f)$$

où $Fix\, f$ désigne l'ensemble des points fixes de f.

Dans le cas du tore T^2, $H_0(T^2, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$, $H_1(T^2, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, $H_2(T^2, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$ et l'on peut majorer $\chi(Fix\, f)$ par 4 (la difficulté technique est ici d'exprimer $H_1(T^2, \mathbb{R})$). Enfin, une symétrie bien choisie permet évidemment de conclure que le nombre maximal de points fixes est 4. Dans le cas de la sphère, avec le même raisonnement, on trouve que le nombre maximal est 2.
Toujours pour évaluer $\chi(Fix\, f)$, nous allons maintenant utiliser le théorème de Gauss-Bonnet. Bien sûr $\chi(Fix\, f) \in \mathbb{N}$ puisqu'il y a un nombre fini de points, et si nous considérons que $Fix\, f = \{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$, alors nous pouvons trouver sur M des voisinages géodésiques convexes $D(x_i)$, contenant x_i, et disjoints 2 à 2. D'après ce que nous savons de la caractéristique d'Euler, $\chi(Fix\, f) = \chi\left(\sqcup_{i=1}^n D(x_i)\right)$ et l'on obtient que

$$\chi(Fix\, f) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\sqcup_{i=1}^n D(x_i)} |K| dV \leq \frac{1}{2\pi} \int_M |K| dV$$

Si maintenant nous prenons la sphère $M = S^2$ avec la métrique riemannienne induite de $\mathbb{R}^3$, alors $K = 1$ et $\chi(Fix\ f) \leq 2$ ce qui donne le résultat attendu, et l'on peut même généraliser le raisonnement sans difficulté en dimension supérieure dans le cas de S^{2n}.
Dans le cas du tore, on peut à nouveau considérer la métrique riemannienne induite de $\mathbb{R}^3$ et majorer la courbure de K par 1. L'aire engendrée par le tore étant égale à $2\pi \times 2\pi = 4\pi^2$, on voit que $\chi(Fix\, f) \leq 2\pi$ donc $\chi(Fix\, f) \leq 6$ car $\chi(Fix\, f) \in \mathbb{N}$. Ce n'est pas le résultat optimal, mais le théorème de Gauss-Bonnet nous donne très simplement une première idée du résultat.

Enfin une dernière approche du théorème de Gauss-Bonnet-Chern peut s'appuyer sur des méthodes analytiques "dures". Considèrons à titre d'exemple le théorème suivant, dont la démonstration n'est pas moins remarquable que son énoncé :

Théorème 18 *Soit (M, g_0) une surface de Riemann compacte pour laquelle $\chi(M) < 0$, et soit une application $K : M \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que $\sup_M K < 0$. Alors il existe une unique métrique riemannienne (lisse) de la forme $g = e^{2u} g_0$ sur M de courbure de Gauss K, et l'application u est aussi de classe C^∞.*

▶ Notons K_0 la courbure et dA_0 l'élément d'unité d'aire de (M, g_0). Si Δ_0 désigne le Laplacien de (M, g_0), on est conduit à résoudre l'équation différentielle non linéaire :

$$\Delta_0 u = K\, e^u - K_0 \tag{E}$$

On va construire une solution sur un espace de Sobolev $\mathcal{H}$ vu comme le complété de $C^\infty(M)$ par la norme $w \to \sqrt{(||w||_2^2 + ||\nabla_0 w||_2^2)}$ (Cf définition n°4.2.2). Soient les fonctionnelles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ définies sur $\mathcal{H}$ par :

$$\mathcal{F}(u) = \int_M |\nabla_0 u|^2 + 2K_0 u\, dA_0$$

$$\mathcal{G}(u) = \int_M K\, e^{2u}\, dA_0$$

Remarquons que toute solution $u \in \mathcal{H}$ de (E) vérifie que

$$\mathcal{G}(u) = \int_M (K_0 + \Delta_0 u)\ dA_0 = \int_M K_0\, dA_0 = 2\pi\chi(M)$$

d'après le théorème de Gauss-Bonnet.

Nous sommes en fait amenés à trouver un minimum pour $\mathcal{F}$ sur l'hypersurface de $\mathcal{H}$ définie par $\gamma := \mathcal{G}(u) = 2\pi\chi(M) \neq 0$. En effet, si v est un tel minimum, $\mathcal{G}$ n'ayant aucun point critique, l'énoncé de la condition d'Euler-Lagrange assure qu'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que

$$\nabla\mathcal{F}(v) = \lambda\nabla\mathcal{G}(v)$$

soit encore :

$$\Delta_0 v + K_0 = \lambda K\, e^{2v} \tag{E'}$$

et l'on obtient par intégration que

$$\gamma = \int_{(M,g_0)} K_0\, dA_0 = \lambda \int_{(M,g_0)} K\, e^{2v}\, dA_0 = \lambda \int_{(M,g)} K_g\, dA_g = \lambda\gamma$$

et par conséquent $\lambda = 1$; dans ce cas v vérifiant (E') est aussi solution de (E).

Il nous reste donc à trouver un minimum v pour la fonctionnelle $\mathcal{F}$. Admettons tout d'abord que la fonctionnelle $\mathcal{G}$ est faiblement continue sur $\mathcal{H}$. Notons par ailleurs $\mathcal{H}' = \{u' \in \mathcal{H},\ \int_M u' = 0\}$. L'inégalité de Poincaré assure qu'il existe une constante $c = c(M, g_0)$ telle que pour $u' \in \mathcal{H}'$,

$$||u'||_2^2 \leq c||\nabla_0 u'||_2^2$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne immédiatement que $\mathcal{F}$ est minorée sur l'ensemble $\mathcal{H}'$. Comme nous avons supposé que $\sup_M K < 0$, d'après les propriétés de l'exponentielles, on peut construire facilement au moins une application continue f à valeurs réelles telle que $\mathcal{G}(f) = \gamma$. Soit $m = \mathcal{F}(f)$ et soit l'ensemble

$$B = \{u \in \mathcal{H}, \mathcal{F}(u) \leq m \text{ et } \mathcal{G}(u) = \gamma\}$$

Alors B est bien sûr non vide, et $\mathcal{F}$ est minorée sur B. En effet, tout $u \in \mathcal{H}$ se décompose sous la forme

$$u = \bar{u} + u'$$

où $u' \in \mathcal{H}'$ et $\bar{u} = \frac{\int_M u\, dA_0}{\int_M dA_0} \in \mathbb{R}$. Nous savons que si $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue convexe et que f est intégrable sur M, on dispose de l'inégalité de Jensen :

$$\phi\left(\frac{1}{Vol(M)} \int_M f\, dA_0\right) \leq \frac{1}{Vol(M)} \int_M \phi \circ f\, dA_0$$

Ainsi, pour $u' \in \mathcal{H}'$, on voit que $|\mathcal{G}(u')| \geq \inf_M |K| \times e^{2\int_M u'\, dA_0} \geq \inf_M |K|$ et comme $\mathcal{G}(u) = e^{2\bar{u}}\mathcal{G}(u')$, on obtient que $\bar{u}$ est majorée sur B. Alors la relation :

$$\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(u' + \bar{u}) = \mathcal{F}(u') + 2\gamma\bar{u}$$

(où $\gamma < 0$) et le fait que $\mathcal{F}$ soit minorée sur $\mathcal{H}$, montre bien que $\mathcal{F}$ est minorée.

Posons dans ces conditions $\mu = \inf_B \mathcal{F}$. Le même raisonnement combiné avec l'inégalité de Poincaré assure que $\bar{u}$ est minorée sur B et l'on peut déduire cette fois-ci que B est un ensemble borné de $\mathcal{H}$.

Soit maintenant (v_n) une suite de B minimisant la fonctionnelle $\mathcal{F}$. B étant borné dans $\mathcal{H}$, il existe une sous-suite qui converge faiblement vers $v \in \mathcal{H}$ et puisque $\mathcal{G}$ est faiblement continue, on a $\mathcal{G}(v) = 2\pi\chi(M)$. Alors $\mathcal{F}(v) \leq \liminf \mathcal{F}(v_n)$, l'application $w \to ||\nabla w||^2$ étant faiblement continue, et par conséquent $\mathcal{F}(v) = \mu$ par minimalité et v est une solution au problème de (E). La régularité de v est simplement un résultat d'analyse fonctionnelle. ■

4 Problème de l'indice

4.1 Le théorème de Riemann-Roch

L'énoncé classique de ce théorème a été amélioré maintes fois avec les derniers travaux de Atiyah-Singer. Nous suivrons ici le développement historique.

Soit M une surface de Riemann compacte et f une fonction méromorphe définie sur M. On sait que pour $p \in M$, on peut exprimer f localement sous la forme :

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k$$

avec $a_n \neq 0$ et bien sur $n = n(p) \in \mathbb{Z}$ dépend de p. On nomme cet entier l'ordre de f en p.

Définition 4.1.1 *Le diviseur de la fonction méromorphe f est défini par :*

$$div(f) = \sum_p n(p)p$$

Cette défintion a un sens car les zéros et les pôles d'une fonction méromorphe sont en nombre fini localement. De manière plus générale, on entend par diviseur tout somme finie de la forme

$$D = \sum_p m(p)p$$

avec $m(p) \in \mathbb{Z}$ et l'on notera alors $deg(D)$ le degré du diviseur D :

$$deg(D) = \sum_p m(p)$$

Le diviseur D sera dit positif si $\forall p$, $m(p) \geq 0$ et on notera alors $D \gg 0$.

Nous allons nous intéresser à l'espace des fonctions méromorphes f telles que $div(f) + D \gg 0$ pour D fixé, espace dont la dimension sera notée $l(D)$. Le théorème de Riemann-Roch assure que :

$$l(D) = deg(D) - g + i + 1$$

avec g le genre de M et i l'indice de spécialité de D.

Qu'est ce que l'indice de spécialité ? On dit que les diviseurs D et D' sont linéairement équivalents s'il existe une fonction méromorphe f telle que $D - D' = div(f)$ et l'on peut aisément vérifier que c'est en fait une relation d'équivalence. Soit maintenant $w = b(z)dz$ une forme différentielle méromorphe pour laquelle nous avons localement en p :

$$b(z) = \sum_{k=n}^{\infty} b_k z^k$$

avec $b_n \neq 0$. Alors on définit $div(w) = \sum_p n(p)p$ et la classe d'équivalence de $diw(w)$ est appelée classe canonique du diviseur et notée K.

Proposition 4.1 *K ne dépend pas de w.*

▶ Soit w_1 une autre forme différentielle méromorphe. Alors $w_1 \in K$ car si l'on note $div(w) = \sum_p n(p)p$ et $div(w_1) = \sum_q m(q)q$ et alors on sait qu'il existe une fonction méromorphe f telle que $div(f) = \sum_r (n(r) - m(r))r$. ■

Alors,

$$i = dim\, H^0(M, \Omega_{K-D})$$

où Ω_{K-D} est l'ensemble des germes de fonctions méromorphes f telles que si $w \in K$, alors $div(f) + [div(w) - D] \gg 0$.

Remarque 19 *$H^0(M, S)$ où M est une variété et S est un faisceau, est l'ensemble de toutes les sections globales ($s_i = s_j$ dans $U_i \cap U_j \neq \emptyset$) de S : $s_i : U_i \to M$ avec $\{U_i\}$ recouvrement de M et s_i section.*

Théorème 19 ***(Dualité de Serre)***
Il y a un isomorphisme :

$$H^0(M, \Omega_{K-D}) \approx H^1(M, \Omega_D)$$

Corollaire 4.1 *Une forme classique du théorème de Riemann-Roch est :*

$$dim\, H^0(M, \Omega_D) - dim\, H^1(M, \Omega_D) = deg(D) - g + 1.$$

4.2 Algèbres de Clifford et Opérateurs de Dirac

Nous savons que la métrique sur TM induit une métrique sur $\Lambda^k T^* M$ fibré des tenseurs antisymmétriques. Si l'on note $\alpha = A_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ et $\beta = B_{j_1 \dots j_k} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}$ alors on posera $(\alpha, \beta) = k! g_{i_1 j_1} \dots g_{i_k j_k} A_{i_1 \dots i_k} B_{j_1 \dots j_k}$ avec toujours $g_{ij} = (dx^i, dx^j)$. On connait l'opération de Hodge qui associe à une k-forme α l'unique $(n-k)$ forme $*\alpha$ telle que, pour toute k-forme β

$$(\alpha, \beta) vol = \beta \wedge *\alpha$$

avec $vol = \sqrt{g} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$.

Dans ces conditions, on définit l'opérateur d^* en tant qu'adjoint formel de d. Pour être plus précis, si α est une k-forme, alors

$$d^* \alpha = (-1)^{nk+n+1} * d(*\alpha)$$

et $d^*\alpha$ est une $(k-1)$-forme et l'on a dans le même temps si l'une des $k-$formes est à support compact :

$$< \alpha, \beta >= \int_M (\alpha, \beta) vol = \int_M \beta \wedge *\alpha = \int_M \alpha \wedge *\beta$$

Propriétés analytiques des Opérateurs de Dirac

Nous travaillerons pour définir les séries de Fourier sur le Tore $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / 2\pi \mathbb{Z}^n$.

Définition 4.2.1 *Soit $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. La série de Fourier de f est définie par la série formelle :*

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}^n} a_j e^{ij.x}$$

où $a_j = \widehat{f}(j) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} f(t) e^{-ij.t} dt$.

Nous avons les résultats bien connus suivants :

Théorème 20 ***(Théorème de Plancherel)***
Pour tout $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$,

$$\int_{\mathbb{T}^n} |f|^2 = (2\pi)^n \sum_j |\widehat{f}(j)|^2$$

Théorème 21 ***(Théorème d'inversion sur L^2)***
Pour $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$ la série de Fourier de f converge vers f pour la norme L^2.

Théorème 22 ***(Théorème d'inversion sur C^∞)***
Pour $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ la série de Fourier de f converge vers f au sens de la topologie de la convergence uniforme ($C^\infty(\mathbb{T}^n)$ est un espace de Fréchet). Par ailleurs, il y a décroissance rapide des coefficients de Fourier de f, c'est à dire $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists c_N \in \mathbb{R}$, tels que l'on ait $|\widehat{f}(j)| \leq c_N \left(1+|j|\right)^N$.

Définition 4.2.2 *Soit k un entier positif. Le produit de scalaire de Sobolev sur $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ d'ordre k est défini par la formule :*

$$< f_1, f_2 >_k = (2\pi)^n \sum_j \widehat{f}_1(j)\overline{\widehat{f}_2(j)} \left(1+|j|^2\right)^k$$

et la k-norme de Sobolev est définie naturellement à partir de ce produit scalaire. On note W^k le $k^{ème}$ espace de Sobolev qui est le complété de $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ par la k-norme de Sobolev.

Remarque 20 *On peut penser W^k comme l'espace des fonctions dont les k premières dérivées appartiennent à L^2.*

Voilà un dernier théorème fondamental dans la théorie des espaces de Sobolev:

Théorème 23 *Pout tout entier $p > n/2$ l'espace W^{k+p} est inclus dans C^k et l'application d'inclusion est continue. Dès lors la k-norme de Sobolev sur $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ est équivalente à la norme suivante :*

$$f \mapsto \sum_{|\alpha|\leq k} \left\| \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \right\|_{L^2}$$

Nous allons maintenant définir les espaces de Sobolev pour des variétés. Soit M une variété C^∞ compacte, (U_j) un recouvrement ouvert de M et (ψ_j) une partition de l'unité subordonnée à (U_j) avec des fonctions C^∞. Soit enfin ϕ_j les difféomorphismes de U_j sur $\mathbb{T}^n$.

Définition 4.2.3 *On définit la k-norme de Sobolev sur $C^\infty(M)$ par :*

$$||f||_k = \sum_j || \left(\psi_j f\right) \circ \phi_j^{-1} ||_k$$

et cette défintiion ne dépend ni du choix des cartes, ni de celui de la partition. Enfin, $W^k(M)$ est le complété de $C^\infty(M)$ pour la norme que l'on vient de définir.

L'Algèbre de Clifford

Définition 4.2.4 *Soit V un espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire symmétrique notée $(\ ,\ )$. L'algèbre de Clifford $Cl(V)$ de V est l'algèbre unitaire telle qu'il existe une application $\phi : V \to Cl(V)$ avec $\phi(v)^2 = -(v,v)1$ et telle que pour toute autre application $\psi : V \to Cl(V)$ vérifiant cette relation, le diagramme suivant soit comutatif par un isomorphisme i :*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\phi} & Cl(V) \\ & \underset{\varphi}{\searrow} & \downarrow i \\ & & Cl(V) \end{array}$$

Définition 4.2.5 *Un fibré S de modules de Clifford sur une variété riemannienne M est un fibré vectoriel dont chaque fibre S_m en $m \in M$ est un module sur $Cl(T_mM \times \mathbb{C})$. De plus on dit que S est un fibré de Clifford s'il est muni d'un produit scalaire hermitien et d'une connexion ∇ telles que:*

Pour tout vecteur $\zeta \in T_mM$ sur S_m, $(\zeta s_1, s_2) + (s_1, \zeta s_2) = 0$
Si X, Y sont des champs de vecteurs, $s \in C^\infty(S)$, $(\nabla_X Y)\, s + Y \nabla_X s$.

Définition 4.2.6 *Soit une base orthonormée locale (e_α) sur les sections du fibré tangent TM. Alors l'opérateur de Dirac est défini pour tout élément $s \in C^\infty(S)$ par*

$$Ds = \sum_\alpha e_\alpha \nabla_\alpha s$$

et en définissant le produit intérieur, on peut démontrer que

$$Ds = ds + d^* s$$

et ainsi $D^2 = dd^* + d^*d$ est le Laplacien. On parle alors du complexe de Dirac (S, d).

4.3 Vers le théorème d'Atiyah-Singer

Définition 4.3.1 *Soient B_1 et B_2 des espaces de Banach. Un opérateur continu $A : B_1 \to B_2$ est un opérateur de Fredholm si $Ker(A)$ est de dimension finie et $Im(A)$ fermée dans B_2 de codimension finie. On définit l'index de A par*

$$ind(A) = dim\, Ker(A) - codim(A)$$

Soit maintenant M une variété riemannienne compacte. Soit S un fibré de Clifford sur M et soit D l'opérateur de Dirac correspondant. D peut être considéré comme un opérateur borné de l'espace de Sobolev $W^1(S)$ dans $L^2(S)$.

Proposition 4.2 *L'opérateur de Dirac D est un opérateur de Fredholm de $W^1(S)$ vers $L^2(S)$.*

Malheureusement, si l'on calcule l'index de D, on s'aperçoit qu'il est nul. Pour que la notion d'index soit intéressante, nous allons étudier un autre opérateur :

Définition 4.3.2 *L'opérateur de Dirac D est dit gradué si le fibré S se divise en 2 et se décompose sous la forme $S_0 \oplus S_1$ et alors D peut s'écrire :*

$$\begin{pmatrix} 0 & d^* \\ d & 0 \end{pmatrix}$$

Si nous utilisons l'opérateur de graduation :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

alors S_0 et S_1 sont les fibrés associés aux valeurs propres de l'involution ε et "D est gradué" signifie que $D\varepsilon + \varepsilon D = 0$. d est aussi un opérateur de Fredholm de $W^1(S_0)$ dans $L^2(S_1)$.

Proposition 4.3 *L'index de d est la caractéristique d'Euler du complexe de Dirac (S, d) (Ici il s'agit d'une généralisation de la caractéristique d'Euler : c'est le nombre de Lefschetz $L(\phi) = \sum_q (-1)^q tr(\phi^*_{|H^q(M)})$ lorsque $\phi = Id$).*

Soit $S = S_0 \oplus S_1$ un fibré de Clifford gradué et soit T un opérateur sur $L^2(S)$ tel qu'il existe un noyau k et que $T(x) = \int k(x,y)\, vol(y)$. La super trace de T est $T_S(T) = Tr(\varepsilon T)$ ou ε est l'opérateur que nous venons de définir. Nous avons la formule :

$$Tr_S(T) = \int tr_S\, k(m,m)\, vol(m)$$

avec toujours $tr_s(k) = tr(\varepsilon k)$ et k le noyau de l'opérateur T.

Proposition 4.4 *Soit D un opérateur de Dirac gradué. Alors*

$$ind(D) = Tr_S(e^{-tD^2})$$

pour tout $t > 0$.

En écrivant un équivalent asymptotique du noyau de e^{-tD^2}, on obtient $Tr_S(e^{-tD^2})$ sous la forme

$$\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \left(\int tr_S \theta_0 + t \int tr_S \theta_1 + ... \right)$$

L'index de l'opérateur gradué de Dirac D est soit 0 si la dimension de M est impaire soit égal à

$$\frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \int tr_S \theta_{n/2}$$

si la dimension de M est paire, avec $dim\ M = n$, et $\theta_{n/2}$ une certaine expression algébrique en la métrique et les coefficients de la connexion (et de l'expression de leurs dérivées).

Le théorème d'Atiyah-Singer permet de donner simplement une valeur à $\theta_{n/2}$ et surtout d'exprimer cette valeur de façon topologique et non pas en fonction de la métrique choisie ou de la connexion. On peut aussi retouver à partir de ce théorème le théorème de Gauss-Bonnet ainsi que la formule de Riemann-Roch.

BIBLIOGRAPHIE

1. M. Berger & B. Gostiaux, *Géométrie différentielle*, Armand et Colin (1972).

2. R. Bott & L. Tu, *Differential forms in Algebraic Topology*, Graduate Texts, Springer.

3. G.E. Bredon, *Topology and Geometry*, Universitext, Springer.

4. H. Cartan, *Formes différentielles*, Hermann (1967).

5. B-Y. Chen, *Geometry of Submanifolds,* Dekker N.Y (1973).

6. S.S. Chern, *A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula,* Ann. of Math. 45 (1944).

7. S.S. Chern, *The Geometry of $G-$structures*, Oeuvres de Chern, A.M.S Mars (1966).

8. C. Godbillon, *Elements de topologie algébrique,* Hermann (1971).

9. J. Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles,* Coll. Grenoble Sci. (1996).

10. J.M. Landsberg, *Alg. Geom. & Projective Diff. Geom.*, Lect. notes Seoul National Univ, 151-742, n°45, (1999).

11. J. Milnor et J. Stasheff, *Characteristic classes,* Princeton Univ. Press (1974).

12. F. Pham, *Géométrie et calcul différentiel sur les variétés,* InterEditions (1992).

13. M. Postnikov, *Leçon de géométrie -Variétés Diff. et Géom. Diff.-,* Ed. Mir (1990).

14. J. Roe, *Elliptic operators, topology and asymptotic methods,* Long. Sci. & Techn, n°179 (1996).

15. M. Spivak, *Differential Geometry,* Bekerley (1979).

16. J. Wolf, *Spaces of constant curvature,* 3rd Ed, Boston (1974).

Table des Matières