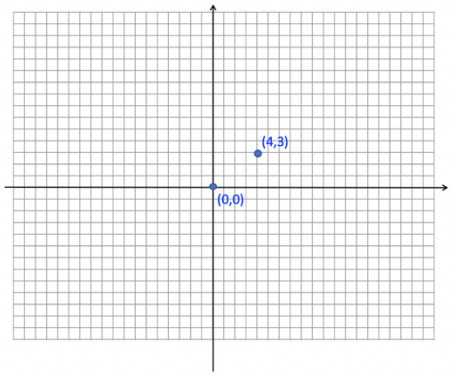
2

Vignette 2

LA DISTANCE ENTRE DEUX POINTS

Cette vignette est tirée d'une séance menée dans une classe de mathématiques de Secondaire 4 comptant une trentaine d'élèves (15-16 ans). Le thème de la séance est la géométrie analytique des distances dans le plan. La tâche proposée aux élèves concerne la distance entre deux points dans le plan cartésien, soit : *Trouvez la distance entre les points (0,0) et (4,3)* (avec un plan cartésien affiché au tableau contenant les deux points tracés).



La tâche a été donnée en contexte de calcul mental, suite à la demande de l'enseignant de la classe pour voir quel type d'activité mathématique ses élèves déploieraient dans ce type de contexte. Les élèves disposaient d'une quinzaine de secondes pour résoudre la tâche, sans recours au support papier-crayon ni à d'autres aides matérielles. Après ce temps, ceux-ci ont été invités à offrir à la classe leurs solutions (complètes ou non) et à expliquer la stratégie par laquelle ils y sont parvenus. Voici un déroulement synthétique et chronologique des explorations menées, étalé sur 40 minutes.

Premier moment : Les formules

Un premier élève explique avoir trouvé la réponse en appliquant la formule usuelle pour la distance (D=$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$), soit en faisant 4-0=4 et 3-0=3, mettant ensuite chaque résultat au carré avant de les additionner. Prendre la racine carrée de cette somme lui permet d'obtenir une distance de 5 unités.

Par la suite, un autre élève explique qu'il est possible de tracer un triangle, puis d'utiliser la relation de Pythagore pour trouver la distance. Pour trouver la valeur des cathètes du triangle, il compte le nombre de « carrés » d'un point à l'autre (soit 3 et 4, que le chercheur-enseignant indique sur le dessin). Il dit ensuite chercher l'hypoténuse en élevant 3 et 4 au carré, en additionnant les carrés, puis en trouvant la racine carrée de la somme ainsi obtenue (Figure 1).

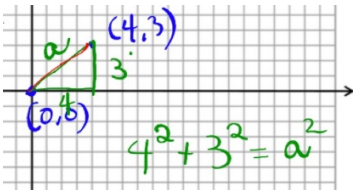


Figure 1 *– Le triangle tracé pour rejoindre les deux points*

Deuxième moment : La diagonale autrement

Une troisième élève, Sandra, lève alors la main et explique qu'il est possible de compter les points entre (0,0) et (4,3).

Sandra :	Moi, j'ai juste compté les points
Ch.-ens. :	Qu'est-ce que tu veux dire exactement par ça ?
Sandra :	[se dirigeant au tableau] Si tu traces une ligne de (0,0) à (4,3), ça donne 1, 2, 3.

Au tableau, elle trace en rouge un segment entre (0,0) et (4,3) sur le triangle précédent (Figure 2). Partant de (0,0), elle compte alors le nombre de « points » de croisement parcourus sur ce segment rouge jusqu'à (4,3), soit en quelque sorte le nombre de diagonales de carrés-unités. Elle s'arrête toutefois en cours de route et affirme que le segment en rouge ne passe pas exactement sur toutes les diagonales des carrés-unités et que, par conséquent, le comptage est difficile à réaliser.

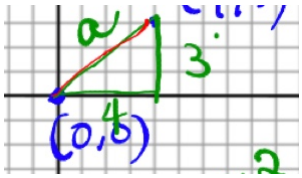


Figure 2 *– Ligne rouge tracée sur le triangle*

Sandra :	Mais finalement, ça ne marche pas comme je pensais mon affaire.
Ch.-ens. :	Ok, c'est difficile à compter sur le dessin.
Sandra :	Oui.

Pour l'aider à expliquer sa stratégie, même si elle a été infructueuse, le chercheur-enseignant trace plus bas sur le tableau un segment qui passe par deux autres points fictifs, mais exactement par toutes les diagonales des carrés-unités. De cette façon, le nombre de diagonales franchies par le segment, ici 4, peut être compté directement (Figure 3).

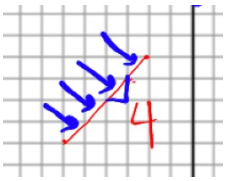


Figure 3 *– Segment de droite croisant toutes les diagonales des carrés-unités*

Ch.-ens. : Donc, Sandra, tu voulais compter le nombre de points de coordonnées que ton segment de (0,0) à (4,3) croises. Et, là, c'est difficile à compter sur le dessin, ça ne croise pas directement. Ok. Par contre, ça pourrait fonctionner. Par exemple, si tu prends ce segment-là ici, qui relie, tiens, ces deux autres points (voir Figure 3). Là, on passe par les diagonales des carrés et on peut compter directement sur le graphique le nombre de points croisés. C'est un peu ça que tu voulais faire Sandra?

Sandra : Oui, genre, mais moi c'était difficile.

Ch.-ens : Et, dans ce cas-ci, ça se compte plus facilement.

Le chercheur-enseignant demande alors à la classe si la longueur de la diagonale du carré-unité est la même que celle du côté de ce même carré, auparavant utilisée pour déterminer la longueur de la cathète du triangle (en traçant au tableau un carré-unité traversé d'une diagonale). Une élève affirme que les deux longueurs ne sont pas les mêmes, car la diagonale d'un carré n'est pas de la même longueur que son côté. Un autre élève ajoute qu'il est certain que ces deux longueurs sont différentes, car l'hypoténuse est toujours le plus grand côté d'un triangle. Finalement, une autre élève, Karine, explique que la diagonale est plus grande, car elle est en face de l'angle le plus grand du triangle. Le chercheur-enseignant questionne alors la classe relativement à cette dernière affirmation.

Troisième moment : Angles et côtés

Le chercheur-enseignant demande en retour aux élèves si ce qui a été affirmé par Karine est toujours le cas, soit que le côté le plus grand dans un triangle se situe en face de l'angle le plus grand (en dessinant un triangle rectangle quelconque au tableau). Karine, pointant le dessin, affirme que l'angle faisant face au grand côté est justement plus grand et qu'on le voit. Francis, un autre élève, explique que, dans un triangle, plus l'angle est grand plus la longueur opposée est grande. Pointant le dessin et référant à l'hypoténuse, il affirme que « si le côté avait été plus long, il donnerait un plus grand angle. » Il ajoute que, puisque la somme des angles d'un triangle donne 180 °, alors l'angle droit est toujours l'angle le plus grand du triangle (parce qu'il ne reste que 90 ° à partager entre les deux autres angles).

Le chercheur-enseignant reprend ces derniers propos en soulignant que tout cela suppose que, dans un triangle, le côté qui fait face au plus grand angle est le plus grand du triangle.

Ch.-ens. : Ce que Francis explique est que dans un triangle rectangle, l'angle de 90 est le plus grand et l'hypoténuse lui fait face. Les deux autres angles restants sont complémentaires et sont donc plus petit que 90 chacun car, au total, tout ceci doit donner 180. Ceci implique aussi que le côté face au plus grand angle est le plus grand du triangle.

Reprenant le dessin du triangle rectangle, le chercheur-enseignant fait varier l'angle droit vers un angle obtus et prolonge le côté associé, montrant que ce côté devient alors plus long ( ). Il transforme ensuite le même angle en un angle aigu pour voir si le côté associé à cet angle devient plus court (Figure 4).

Figure 4 *– Variation de l'angle et son effet sur le côté « hypoténuse » du triangle*

Ch.-ens. : Donc si on fait varier cet angle droit vers un angle obtus, le côté sera plus long et la même chose si l'angle devient un angle obtus. Mais, est-ce que c'est toujours vrai ? Est-ce que votre théorie du côté opposé à l'angle est toujours bonne ?

Pour répondre à cette question, plusieurs élèves font alors référence aux triangles isocèles et équilatéraux. Un élève dit que tout fonctionne pour le triangle isocèle, avec deux côtés égaux face à deux angles égaux. Un autre souligne que c'est aussi le cas pour le triangle équilatéral, car « c'est partout pareil » : mêmes angles et mêmes longueurs de côtés.

Quatrième moment : Retour à la diagonale du carré

Le chercheur-enseignant revient par la suite sur la question des diagonales des carrés-unités et la stratégie voulant qu'il est possible de trouver la distance en les comptant. Pour faire suite aux explications des élèves voulant que la diagonale du carré soit plus grande que le côté du même carré, il souligne que dans cette stratégie il suffit de compter les diagonales, c'est-à-dire le nombre de diagonales franchies par le segment d'un point à l'autre.

Ch.-ens : Donc, la diagonale est plus grande que le côté du carré, Dans la stratégie de Sandra, au final, on veut compter le nombre de diagonales, le nombre de diagonales de carrés

> unités d'un point à l'autre, de (0,0) à (4,3). On parlait de croisement tantôt sur le graphique. On aurait donc ici 4. 4 est aussi une mesure possible de la distance entre (0,0) et (4,3) [1].

Il écrit alors au tableau qu'il est possible d'exprimer la distance entre les deux points par la valeur de 4 diagonales ou celle de 5 côtés de carrés-unités, ce qui donne deux mesures différentes pour la même distance. Un élève ajoute que si la valeur en unités de la diagonale du carré est connue, il est possible de trouver le nombre de carrés-unités pour ce segment en le multipliant par ce « facteur ».

Le chercheur-enseignant écrit donc 1,2 comme valeur fictive de cette diagonale, en insistant sur le fait que chacune des deux mesures obtenues est acceptable, mais qu'elles n'auraient tout simplement pas les mêmes unités (carré-unité ou diagonale-unité).

Cinquième moment : L'angle est de 45 °

Un élève propose alors une autre solution en faisant appel à la loi des sinus, affirmant que l'angle du triangle est de 45 ° (Figure 5). Le chercheur-enseignant demande alors à cet élève comment ce dernier sait que l'angle est de 45 °.

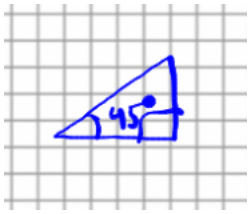


Figure 5 *– Triangle rectangle isocèle présenté dans la solution*

Ch.-ens : Et, comment sais-tu que l'angle est de 45° ?

Plusieurs élèves affirment à voix basse leur désaccord

Edouard : parce que 45°, pour les deux autres angles du triangle !

Certains élèves acquiescent, d'autres s'opposent

[1] À noter que c'est l'exemple créé par l'enseignant pour illustrer la stratégie de Sandra qui donne 4 diagonales, et non la tâche initiale de la distance entre (0,0) et (4,3)

Ch.-ens : Ok, alors, oui, peut-être 45°, peut-être pas.

Simone : C'est pas 45° pantoute.

Jonathan : Ben oui, voyons.

Ch.-ens. : Donc, on n'est pas certain, mais il faut arriver à quelque chose, il faut s'entendre, à savoir si c'est ou pas 45°.

Comme celui-ci n'arrive pas à répondre, certains élèves acceptent l'affirmation alors que d'autres expriment une réticence. Face aux divergences d'opinions entre les élèves, le chercheur-enseignant leur demande de prendre quelques minutes, seuls ou en équipe et avec leur matériel scolaire au besoin, pour explorer la question à savoir si l'angle du triangle est de 45 ° ou non, et d'*élaborer un argument permettant de convaincre les autres élèves*. Après cinq à six minutes de travail, le chercheur-enseignant demande aux élèves de reprendre leurs places et de faire part au reste de la classe de leurs trouvailles.

Sixième moment : Les premiers arguments pour convaincre de l'angle de 45 °

Une première élève, Amélie, lève la main et explique que sur sa feuille aide-mémoire, donnée aux élèves pour les aider aux examens, il y a un triangle rectangle isocèle qui possède des angles de 45 °. Toutefois, le triangle de 4 et 3 unités de côté n'est pas isocèle, alors il n'est pas possible d'affirmer directement que l'angle est de 45 °, car les côtés ne sont pas égaux. Le chercheur-enseignant mentionne qu'il s'agit d'une sorte de raisonnement inversé : puisque le triangle rectangle isocèle de la feuille aide-mémoire a des angles de 45 ° et que le triangle en question n'est pas un triangle isocèle rectangle, alors on ne peut pas affirmer directement que son angle est de 45 °.

Une autre élève, Martine, s'avance au tableau. À partir du triangle formé des points (0,0) et (4,3), elle complète un rectangle (, voir Figure 6). Elle explique que l'hypoténuse est la diagonale de ce rectangle, qui le coupe en deux et donc coupe aussi l'angle de 90 ° en deux, donnant des angles de 45 °.

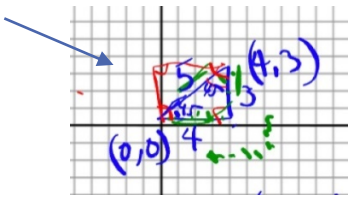


Figure 6 *– Rectangle, en rouge, complété à partir du triangle*

Le chercheur-enseignant reprend ici l'argument de Martine pour la classe :

Ch-ens. : Ce que Martine nous dit, c'est qu'on sait que la diagonale du rectangle coupe ce dernier en deux parties identiques, de même aide, et donc que par le fait même, elle coupe

l'angle en 2 parties identiques. L'angle étant de 90, alors chacune des parties est de 45. L'angle est donc de 45.

Septième moment : Les contre-exemples de l'angle de 45 °

Une élève affirme alors aussitôt son désaccord avec l'affirmation précédente et dessine au tableau un rectangle avec une diagonale en disant que bien qu'elle divise le rectangle en deux, rien n'assure que l'angle soit lui aussi divisé en deux parties égales (Figure 7).

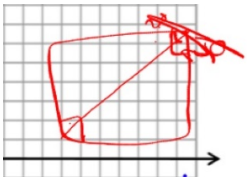


Figure 7 *– Rectangle dessiné en réponse à l'affirmation selon laquelle l'angle de 90 ° est coupé en deux parties égales*

Le chercheur-enseignant reformule le désaccord de l'élève, expliquant qu'avec son exemple, qui fait ici office de contre-exemple, elle avance que même si la diagonale coupe le rectangle en deux parties égales, les angles eux ne sont pas nécessairement divisés en deux parties égales. Une autre élève, Béatrice, complète cette idée en ajoutant que puisque les côtés du triangle ne sont pas égaux (soit de 3 et de 4), la diagonale ne coupe pas l'angle de 90 ° en deux angles de 45 °. Le chercheur-enseignant reformule l'affirmation de Béatrice en disant qu'étant donné que les côtés du triangle ne sont pas égaux, les angles ne seront pas nécessairement égaux.

Ch.-ens. : Ce que Béatrice affirme est que nous savons que les côtés des triangles ne sont pas de même mesure : on en a un de 3, un de 4, et même un de 5, l'hypoténuse. Et donc, les angles ne seront pas nécessairement égaux non plus, si les côtés ne le sont pas. En fait, elle réutilise implicitement l'idée précédente acceptée de tous, votre théorie, à savoir qu'un côté plus grand fait face à un angle plus grand. Ici, comme les côtés ne sont pas égaux, alors les angles qui leur font face ne seront pas égaux non plus. Un côté plus grand sera face à un angle plus grand.

Amélie, l'élève ayant fait référence à sa feuille aide-mémoire auparavant, ajoute qu'il leur arrive tous parfois dans un examen d'avoir des triangles rectangles qui n'ont pas des angles de 45 °, par exemple des triangles avec des angles de 32 ° et 58 °. Elle trace alors au tableau un exemple de ce type de triangle, qu'elle complète pour former un rectangle (Figure 8). Elle explique alors que la diagonale coupe le rectangle en deux, mais sans que les angles obtenus soient de 45°.

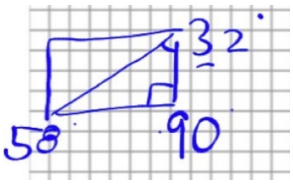


Figure 8 *– Triangle contre-exemple avec angles de 32 et 58 degrés*

Le chercheur-enseignant affirme alors qu'Amélie offre ici un contre-exemple, avec un type de triangle rectangle qu'ils rencontrent fréquemment et qui n'a pas deux angles de 45°. Ceci fait en sorte pour Amélie que les angles du triangle précédent ne sont pas nécessairement de 45°. Un élève propose ensuite d'appliquer la loi des sinus, soit de le faire réellement, avec les données actuelles du triangle, soit sin90°/5=sin?/4 obtenant ainsi un angle de 58,1° [résultat corrigé à 53,1° et 36,9° par la suite].

Huitième moment : Le *mea culpa*

Après la formulation de toutes ces idées, le chercheur-enseignant demande aux élèves comment ils se positionnent concernant l'angle de 45°. Un des élèves ayant proposé la stratégie de la loi des sinus se rend alors au tableau et explique que, du fond de la classe, visuellement et sans mesures d'angle, l'hypoténuse du triangle semble passer directement par les points des diagonales (et couper les carrés-unités en deux), donnant l'impression de former des angles de 45°. Il ajoute que, toutefois, lorsque rendu au tableau, il devient clair que ce n'est pas le cas.

Maintenant convaincus que l'angle n'est pas de 45°, les élèves maintiennent leur désaccord face à l'affirmation concernant l'utilisation de la loi des sinus et l'angle de 45°. Le chercheur-enseignant réexplique la position de celui-ci en affirmant qu'il leur offre un certain *mea culpa* pour avoir insisté sur l'angle de 45° et que c'était uniquement une erreur visuelle. Les élèves demeurent toutefois fortement en désaccord.

Neuvième moment : Les derniers arguments sur l'impossibilité de l'angle de 45°

Un élève reprend et complète ensuite l'argument précédent de Béatrice sur les mesures des côtés du triangle. Reprenant ainsi la théorie du plus grand côté faisant face au plus grand angle, et donc que des côtés différents entraînent des angles différents, il explique que puisque les trois côtés du triangle ont des mesures différentes, leurs angles associés seront aussi différents.

En vue de conclure, le chercheur-enseignant souligne qu'un élève, Marco, a préalablement proposé dans son cahier de former un carré pour évaluer la question de l'angle de 45°. Cet élève, trop timide

pour s'exprimer devant toute la classe, demande au chercheur-enseignant d'expliquer son raisonnement aux autres.

Ch.-ens. : Vous vous rappelez plus tôt la question sur la diagonale et le côté ? On a dit que la diagonale était plus longue. Ok, alors ce que Marco a fait est de faire un carré de 4 par 4, et de le couper d'une diagonale comme pour la question de tantôt sur la diagonale du carré.

Le chercheur-enseignant dessine un carré de 4x4 au tableau et insère le triangle de côté 3 et 4 à l'intérieur (voir figure 9). Reprenant les propos de l'élève et reliant ce dessin au carré-unité utilisé auparavant pour comparer la mesure de la diagonale à celle du côté du carré, le chercheur-enseignant fait valoir que ce même dessin est présent dans le carré de 4 unités de côté nouvellement dessiné.

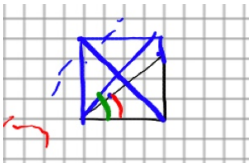


Figure 9 *– Comparaison des triangles à partir du carré*

Ch.-ens : Ça ici, c'est notre triangle rectangle de tantôt avec les côtés de 4 et 3. On prolonge alors le côté de 3 vers un de 4 pour arriver au carré. Dans notre carré de 4x4, la diagonale forme deux triangles isocèles et on a dit tantôt, en parlant de la feuille d'examen par exemple, que dans un triangle rectangle isocèle, les angles étaient de 45°. Donc si les angles sont de 45° pour le carré 4x4, ils ne peuvent pas l'être pour notre triangle du départ.

Le chercheur-enseignant trace ensuite des arcs de cercle pour marquer les angles (celui en rouge pour le triangle de mesures 4x3 unités et celui en vert pour le triangle de 4x4 unités).

Ch.-ens : Car, regardez l'angle formé est plus petit. Chacune des hypoténuses, celle du 4x4 et celle du triangle de 4 et 3, ne décrivent pas le même angle. Je trouve que c'est une très belle façon de le voir, et qui ramène plusieurs de nos idées depuis le début.

Après avoir entendu ces divers arguments, les élèves se disent d'accord avec le fait que l'angle n'est pas de 45°. Les stratégies pour résoudre la tâche initiale ayant toutes été explorées, la séance se continue avec la résolution d'une autre tâche.