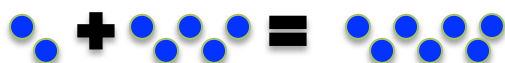


Quelques notes à propos des opérations sur les nombres

Des opérations dans tous les sens

Familiers que nous sommes avec les opérations telles que l'addition ou la multiplication sur les nombres, on en vient à perdre de vue toute la complexité qui se cache derrière leur utilisation. Qu'est-ce au juste qu'une opération mathématique? En mathématique, on définit une opération comme un *processus* par lequel des nombres, mais aussi d'autres objets mathématiques, sont transformés suivant des règles précises. Ainsi, on peut voir l'addition de 2 et 5 comme la transformation de ces nombres en un nouveau nombre : $2 + 5 = 7$. Comment sait-on que cette opération sur ces nombres conduit à ce nombre-là? Et il y a en fait une multitude « d'explications », certaines plus formelles, d'autres plus intuitives. L'une d'elles consiste à dire que « *additionner c'est comme réunir deux ensembles* ». Si on nomme 2, 5, et 7 les quantités représentées ci-dessous, « on voit bien » pourquoi $2 + 5 = 7$:



Vu ainsi, on devine même rapidement la propriété de *commutativité* de l'addition, suivant laquelle l'ordre des nombres additionnés n'a pas d'importance ($5 + 2$ et $2 + 5$ donnent 7, alors que $4 \div 2$ et $2 \div 4$ ne sont pas équivalents du tout!).

Bien, mais ceci ne couvre pas vraiment l'ensemble de ce que peut signifier $2 + 5 = 7$, par exemple dans la situation de comparaison : « Anne est arrivée à 2 heures, et Paul est venu 5 heures plus tard. À quelle heure Paul était-il présent? ». Il ne s'agit pas vraiment de réunir un ensemble de 2 heures à un autre en contenant 5. On parle alors de différents « sens » pour les

opérations, faisant ainsi référence aux contextes où une opération mathématique correspond à la transformation recherchée. Bien maîtriser une opération c'est donc d'une part être en mesure de la reconnaître dans différentes circonstances. Plusieurs mots-clés peuvent servir à se repérer (par exemple : de plus, ensemble, ajoute, etc.), mais il faut aussi s'en méfier, par exemple dans : « Jim a 8 ans, soit 2 de plus que Jules. Quel est l'âge de Jules? ». Et vous connaissez peut-être le problème de l'âge du Capitaine, où additionner chèvres et moutons ne donne pas grand chose... On peut à l'inverse se demander si « $5 + 2 = 7$ » doit nécessairement se traduire en termes d'ensembles ou de positions pour faire sens. De plus, un problème comme celui de l'âge de Jules et Jim pourrait se traduire en différentes opérations : il y a bien $8 - 2 = ?$, mais aussi $? + 2 = 8$ ou même $8 - ? = 2$! Dans le cas de l'addition et de la soustraction (qu'on appelle des relations additives) on parle en général de 3 types de situations : transformation, réunion, et comparaison. Et on peut dans chaque cas chercher différentes choses : l'état initial ou final, le complément, la différence. Pas si simple qu'on l'aurait cru!

Il en va évidemment de même pour ce qui est des relations dites multiplicatives : la multiplication et la division. En effet, on peut facilement distinguer deux types de situations où on rencontre la division, souvent désignées sous le nom « partage » et « mesure » (ou « contenance »). Voici des exemples :

- Mélanie distribue également 12 raisins entre 4 paniers. Combien y aura-t-il dans chacun?
- Pauline utilise ses 12 raisins pour faire des paniers en contenant 4 chacun. Combien de paniers fera-t-elle?

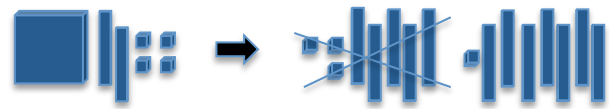
Tout de même subtile, la différence est que dans un cas on cherche le nombre de groupes qui sera formé (sens mesure ou contenance), alors que dans l'autre on veut connaître le nombre d'éléments contenus dans chaque groupe (sens partage). Mathématiquement parlant, l'opération est la même ($12 \div 4 = 3$), mais on change l'interprétation du résultat et du reste ou de la partie décimale : si on avait plutôt « $12 \div 5 = 2,4$ », que signifie le « $0,4$ » dans chaque cas? Plus la situation est complexe, plus on risque de s'embrouiller! C'est pourquoi il est important de pouvoir raisonner sur ce qu'on fait en opérant sur les nombres, et pas simplement apprendre des tables ou des procédures (on y revient dans un moment).

La multiplication quant à elle est souvent rencontrée dans au moins 4 ou 5 types de situations. On peut la voir comme une addition répétée (« Je marche 5 km par heures durant 3 heures, j'ai marché combien? » traduit en « $5 + 5 + 5 = ?$ »), comme mesure de volume ou de surface (« Mon plancher a 5 tuiles de large et 2 de long, ça fait combien de tuiles? »), comme comparaison (« J'ai 5 fois plus d'amis que Paul, qui lui en a 2. J'en ai donc? ») ou comme combinaison (« Coco doit choisir entre 2 pantalons et 5 chandails, combien a-t-elle de possibilités? »)... Encore une fois, on peut tout à fait chercher soit un état, soit une transformation (comparer « J'en ai 2 fois moins, j'en ai donc? » avec « J'en ai 2, donc combien de fois moins? »). On voit aussi que les relations multiplicatives interviennent souvent dans des situations où les unités sont continues et/ou discontinues. Un problème partant de l'énoncé « J'ai 7 mètres de rubans » peut ainsi demander de trouver un nombre de rubans (unités discontinues) ou bien la mesure des rubans obtenue par division

(unités continues : mètres, centimètres, millimètres, etc.).

Premières pistes didactiques

Une chose à retenir de ceci est l'importance de varier le type de situations présentées aux élèves, sachant que s'ils peuvent « opérer » dans certaines, il leur faudra peut-être tout de même un peu de temps pour s'y reconnaître dans d'autres. Nous avons aussi mentionné l'importance de pouvoir « raisonner » sur une opération. Raisonner ici, c'est d'abord pouvoir, au besoin, se référer à une situation bien maîtrisée pour « comprendre » ce qui se passe au moment de faire une opération. L'image des ensembles que l'on sépare ou que l'on réunit est ainsi fort intéressante pour expliquer, par exemple, l'opération $124 - 53 = 71$, en plus de mettre en évidence le lien entre les opérations et l'écriture des nombres dans notre système décimal :



124-53=? Je retire 3 cube-unité : il m'en reste un. Je dois enlever 5 bâtonnets-dizaines, mais n'en n'ayant que 2 de libre, je brise ma plaquette-centaine en 10 bâtonnets-dizaine pour en retirer 3 en plus des 2 autres. Il me reste donc 7 bâtonnets-dizaine et 1 cube-unité, donc 71!

Si ceci met en évidence un autre principe didactique, l'importance de travailler les opérations en même temps que l'écriture décimale, c'est aussi l'importance du matériel, des représentations, des manipulations qui se dégagent. En effet, il est important que l'apprentissage des opérations se fasse de manière concrète et active. Les enfants doivent pouvoir voir, toucher, nommer, expliquer ce qui se passe afin de bien apprécier les transformations en jeu.

Le point suivant concerne les fameux algorithmes : nous avons tous appris comment calculer à la main quelque chose comme « $1505 \div 15$ », mais plusieurs auraient peine à le faire aujourd'hui, et encore plus nombreux sont ceux qui auraient bien du mal à expliquer pourquoi la technique qu'ils ont apprise fonctionne. Alors?

La question des algorithmes

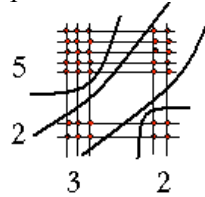
Plusieurs ont l'impression que « savoir calculer » c'est essentiellement connaître les algorithmes, des techniques de manipulation des nombres permettant de trouver le résultat d'une opération telles que $9 + 5$ ou 3×15 . On vient déjà de voir que c'est beaucoup plus que ça. On peut même se demander s'il est encore pertinent d'apprendre ces techniques parfois fort complexes puisque les calculatrices sont désormais tellement accessibles. On n'enseigne d'ailleurs plus l'algorithme de la racine carrée, et il faut bien admettre que nous-même faisons rarement de longs calculs à la main dans la vie de tous les jours. Pourquoi ne pas plutôt mettre l'emphasis sur le calcul mental (certains chercheurs avancent que 90% des calculs que nous faisons au quotidien se font mentalement)?

Les algorithmes que nous connaissons sont apparus historiquement en raison de leur efficacité par rapport aux besoins des sciences et du commerce, en accord avec les développements technologiques de l'époque : en particulier, l'apparition du papier. Il existe en effet de nombreux autres moyens de faire ces calculs autrement, avec un boulier par exemple, et il existe aussi de nombreux algorithmes : on ne fait pas la soustraction de la même manière en France et au Québec! On peut en effet, « emprunter » à gauche dans le premier

nombre et transformer, par exemple, 5 dizaines en 4 dizaines plus 10 unités. Ou alors, on peut plutôt « ajouter » au nombre à soustraire, et faire ensuite la soustraction, par exemple en soustrayant 4 plutôt que 3 dizaines :

$$\begin{array}{r} \cancel{45} \ 11 \\ - \ 3 \ 8 \\ \hline 1 \ 3 \end{array} \quad \text{vs} \quad \begin{array}{r} 5 \ 11 \\ - \ 13 \ 8 \\ \hline 1 \ 3 \end{array}$$

D'autres techniques reposent davantage sur le calcul mental (on peut apprendre à faire une multiplication comme 324×532 en une seule ligne!), et il y a également des façons de procéder qui demandent moins, voire pas du tout de faire appel aux tables de multiplication, de division, d'addition ou de soustraction¹. C'est le cas de la méthode des lignes ou des baquettes, illustrée ici pour la multiplication 52×32 :



Le résultat se lit en comptant le nombre de points : 15 centaines (en haut à gauche), 4 unités (en bas à droite) et 16 dizaines (au milieu : 6 en bas à gauche, 10 en haut à droite), ce qui donne : $1500 + 160 + 4 = 1664$

Fascinant, non? Peut-être en retenir c'est que nos algorithmes sont des faits de l'histoire et de la culture, pas des absolus indiscutables et indispensables!

En fait, tout indique qu'il est de loin préférable de permettre aux enfants de s'appropriier les opérations en

¹ En effet, s'il est possible (voir facile) de compter $5 + 2 = 7$ en allant de 5 à 7, on fait rarement ce comptage, tout comme on « sait » que $5 + 5 = 10$ ou $4 \times 5 = 20$ sans les calculer : c'est que nous connaissons les « tables » de ces opérations pour les nombres en question.

développant leurs propres techniques, qui peuvent par exemple consister à faire l'addition $9 + 5 = 14$ en calculant $10 + 5 - 1$ au lieu de noter une retenue. Il s'agira ensuite de *faire naître la nécessité d'avoir des outils plus efficaces* (par exemple en faisant additionner plusieurs nombres ou des nombres bien choisis) pour leur présenter nos algorithmes. On a aussi tout avantage à faire cette introduction en faisant des liens concrets avec ce que les enfants connaissent, en expliquant et en « verbalisant » les algorithmes avec eux afin qu'il ne s'agisse pas simplement d'apprendre une technique dépourvue de sens, travail mécanique dont on peut facilement oublier des « détails », conduisant à des erreurs ou des blocages. Rien de pire que les « trucs » qui nous laissent sans moyens en cas de doute : comment calcule-t-on $0,8 \times 0,8$, déjà ? Ou $0,08 \times 0,80$?

Enfin, il est important de souligner qu'une grande partie du travail sur les opérations se fait donc *en dehors des algorithmes*. On peut faire des choses utiles et amusantes avec la calculatrice, mettant l'accent sur l'identification de l'opération à utiliser pour résoudre un problème, ou pour jouer avec les

nombres comme dans le cas de la « calculatrice brisée » (comment calculer 5×15 si la touche de multiplication est brisée ? Comment retrouver le reste de $13 \div 5$?). Les « faits numériques » comme les tables de multiplications, utiles pour être efficaces avec les algorithmes, peuvent aussi être travaillées de manières variées, intéressantes, par exemple en mettant l'accent sur ce que les élèves peuvent observer comme régularités, au lieu de mettre tous les efforts sur la mémorisation !

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

On peut voir bien des régularités dans les tables de multiplications !

En ce sens, on peut même *voir les algorithmes comme des occasions* de travailler sur les nombres, leur écriture, et les opérations, plutôt que simplement comme quelque chose que les élèves doivent apprendre.