Devoir I

Dû le jeudi 26 janvier 2024

Instructions : Il y a cinq problèmes. Chaque problème vaut vingt points pour un total de cent points. Pour chacun des problèmes, présenter une solution détaillée et soignée qui soit lisible et compréhensible pour une personne ne connaissant pas a priori la solution. Chaque réponse doit être pleinement justifiée. Il est possible de travailler en équipe avec d'autres étudiants, mais ultimement, il est important que chacun écrive sa propre solution. Seulement les devoirs écrits à la main seront acceptés.

1. À l'aide de l'identité trigonométrique $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, montrer que
$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \quad \forall\theta \in \mathbb{R}.$$

2. Calculer $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ si $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^3+2}}$.

3. Calculer la dérivée de la fonction $f(x) = (1+x)^2 x^{\ln x}$. *Suggestion : Calculer dans un premier temps la dérivée logarithmique de f.*

4. Calculer implicitement $\dfrac{dy}{dx}$ si $x^4 + 3x^2y^2 + y^4 = 1$.

5. Chaque année, Batman doit amener sa Batmobile à un garage à 100km de sa résidence pour la pose des pneus d'hiver. La quantité d'énergie requise pour parcourir une distance d à une vitesse constante v est donnée par
$$E = d\left(av^2 + \frac{b}{v}\right),$$
où a et b sont des constantes strictement positives. En portant sa voiture au garage, à quelle vitesse doit conduire Batman pour minimiser l'énergie requise ?