Devoir II

Dû le jeudi 15 février 2024

Instructions : Il y a cinq problèmes. Chaque problème vaut vingt points pour un total de cent points. Pour chacun des problèmes, présenter une solution détaillée et soignée qui soit lisible et compréhensible pour une personne ne connaissant pas a priori la solution. Chaque réponse doit être pleinement justifiée. Il est possible de travailler en équipe avec d'autres étudiants, mais ultimement, il est important que chacun écrive sa propre solution. Seulement les devoirs écrits à la main seront acceptés.

1. Évaluer les limites suivantes en utilisant la règle de l'Hôpital :
   (a) $\lim_{x\to 0}(e^{x^3}-1)^{2x}$;
   (b) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\arcsin x}-\frac{1}{x}\right)$.

2. Évaluer la limite $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^7\frac{1}{n}$. *Indice : Cette limite correspond-elle à une intégrale définie ?*

3. Calculer les dérivées des fonctions suivantes en utilisant le théorème fondamental du calcul :
   (a) $F(x)=\int_0^x \frac{t+\sin(t^5)}{1+t^2}dt$;
   (b) $G(x)=\int_0^{\sin x} \frac{t+\sin(t^5)}{1+t^2}dt$.

4. On **définit** le logarithme naturel par $\ln x := \int_1^x \frac{dt}{t}$ pour $x\in]0,+\infty[$. À partir de cette définition, montrer que

$$\ln(xy)=\ln x+\ln y \quad \forall x,y\in]0,+\infty[.$$

   Indice : utiliser le fait que $\int_a^b f(t)dt=\int_a^c f(t)dt+\int_c^b f(t)dt$ *pour* f *une fonction continue.*

5. Évaluer les quatre intégrales suivantes :
   (a) $\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}dx$; *Indice : Cette intégrale correspond-elle à l'aire d'une région du plan ?*

(b) $\displaystyle\int_{-5}^{2} |x+2|dx\,;$

(c) $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{(\ln x)^5}{x}dx\,;$

(d) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sec^2 x}{\tan^3 x}dx.$