

Devoir III

Dû le jeudi 21 mars 2024

Instructions : Il y a cinq problèmes. Chaque problème vaut vingt points pour un total de cent points. Pour chacun des problèmes, présenter une solution détaillée et soignée qui soit lisible et compréhensible pour une personne ne connaissant pas a priori la solution. Chaque réponse doit être pleinement justifiée. Il est possible de travailler en équipe avec d'autres étudiants, mais ultimement, il est important que chacun écrive sa propre solution. Seulement les devoirs écrits à la main seront acceptés.

1. En utilisant le fait que $e^{x^3} \geq 1$ pour $x \geq 0$, montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} e^{x^3} dx$ diverge.
2. Évaluer les intégrales indéfinies suivantes en faisant une intégration par parties :
 - (a) $\int x \sec^2 x dx$;
 - (b) $\int \sin(\ln x) dx$.
3. Évaluer les intégrales indéfinies suivantes :
 - (a) $\int (\cos x)^4 (\sin x)^5 dx$;
 - (b) $\int (\sin x)^2 (\cos x)^2 dx$.
4. Évaluer l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ de deux manières différentes :
 - (a) En faisant la substitution trigonométrique $x = \tan \theta$ en supposant que $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$;
 - (b) En faisant la substitution $x = \sinh \theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}$, c'est-à-dire $\theta = \operatorname{arcsinh} x$ où $\operatorname{arcsinh}$ est l'inverse de la fonction \sinh .
5. Évaluer les intégrales indéfinies suivantes à l'aide d'une décomposition en une somme de fractions partielles :
 - (a) $\int \frac{dx}{x(100-x)}$;
 - (b) $\int \frac{9x+8}{(x-2)(x+3)} dx$.