Séance de travaux pratiques X

Le samedi 6 avril 2024

1. Déterminer la série de Taylor des fonctions suivantes :
   (a) $f(x) = \cos(2x)$;
   (b) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$;
   (c) $f(x) = e^{5x}$.

2. Déterminer les séries de Taylor des fonctions suivantes en utilisant des séries de Taylor déjà connues :
   (a) $f(x) = e^{-x^2}$;
   (b) $f(x) = x \sin x$;
   (c) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$;
   (d) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$;
   (e) $f(x) = \ln(1-x)$;
   (f) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

3. On considère la fonction $f(x) = e^{x^2}$.
   (a) Trouver le polynôme de Taylor $P_8(x)$ de la fonction e^{x^2}.
   (b) Pour $x \in [0,1]$, montrer que $|e^{x^2} - P_8(x)| \leq \dfrac{e}{120}$ en utilisant le terme d'erreur de Lagrange pour le polynôme d'ordre 4 de la fonction e^x.
   (c) Estimer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2} dx$ en remplaçant e^{x^2} par son polynôme de Taylor d'ordre 8. Cette estimation est-elle plus petite ou plus grande que la valeur exacte ?
   (d) Par quel polynôme de Taylor peut-on remplacer e^{x^2} pour obtenir une estimation de l'intégrale de $\int_0^1 e^{x^2} dx$ avec une erreur d'au plus $E = 10^{-5}$?

4. Déterminer vers quelles valeurs les séries suivantes convergent :
   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2^{k+1}$;
   (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k$;
   (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)}$, *Indice : les sommes partielles sont des sommes télescopiques* ;
   (d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$.