Séance de travaux pratiques II

Le samedi 27 janvier 2024

1. Donner l'exemple d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ne possédant ni minimum, ni maximum.

2. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui est dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a)f(b) < 0$.
   (a) Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.
   (b) Si $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$, utiliser le théorème de Rolle pour montrer que la fonction f s'annule en un seul point sur l'intervalle $[a, b]$.
   (c) Montrer que la fonction $g(x) = \arctan(x^5 + x + 3)$ s'annule en un unique point sur l'intervalle $[-2, 2]$.

3. Utiliser le théorème de Lagrange pour établir les inégalités suivantes :
   (a) $\tan x > x$ pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$;
   (b) $(1 + x)^n > (1 + nx)$ pour $x > 0$ et $n > 1$;
   (c) $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$.

4. Soient $f(x) = x^3 + 1$ et $g(x) = x^2 - 1$. Montrer que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = -1, \quad \text{mais que} \quad \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0.$$

   Cela contradit-il la règle de l'Hôpital ?

5. Déterminer la forme de l'indétermination (i.e. $0/0$, ∞/∞, $0 \cdot \infty$, 0^0, ∞^0 ou 1^∞) et utiliser la règle de l'Hôpital pour calculer les limites suivantes :
   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}$;
   (b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x^3}{\ln(x + 2)}$;
   (c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^2 e^{-x^2}$;
   (d) $\displaystyle\lim_{x\to 3+} \left(\frac{x}{x - 3} - \frac{1}{\ln(x - 3)}\right)$;
   (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$;
   (f) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \left(\ln\left(\frac{1}{1 - x}\right)\right)^{1-x}$;
   (g) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (1 + \cos x)^{\tan x}$.