Séance de travaux pratiques III

Le samedi 3 février 2024

1. Calculer les sommes suivantes avec les trucs vus en classe :
   (a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{1000} i$;
   (b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{2000} i^2$.

2. Calculer le volume d'un cône de hauteur h et de base circulaire de rayon r en l'approximant par une pile de n cylindres, chacun de hauteur $\dfrac{h}{n}$.

3. Soit $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
   (a) Montrer que $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$ si f est une fonction paire, c'est-à-dire telle que $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in [-a, a]$.
   (b) Montrer que $\displaystyle\int_{-a} f(x)dx = 0$ si f est une fonction impaire, c'est-à-dire telle que $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in [-a, a]$.
   (c) Calculer $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$.

4. Évaluer les intégrales suivantes :
   (a) $\displaystyle\int_{-1}^{5} |x-3|dx$;
   (b) $\displaystyle\int_{0}^{7} (4 + |1-x|)dx$.

5. On considère la somme géométrique $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a^i$ pour $a \in \mathbb{R}$ un nombre réel fixé.
   (a) Montrer que $aS_n - S_n = a^{n+1} - 1$.
   (b) En déduire que $S_n = \dfrac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$ lorsque $a \neq 1$.
   (c) Si $f(x) = e^x$, trouver $\displaystyle\int_{0}^{1} f(x)dx$ en calculant la limite $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{f(\frac{i}{n})}{n}$.

6. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ en calculant $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(i^4 - (i-1)^4\right)$ de deux façons différentes.