Séance de travaux pratiques IV

Le samedi 10 février 2024

1. Calculer la dérivée de F si :
   (a) $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$;
   (b) $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^3} e^{-t^2} dt$.

2. Calculer les intégrales suivantes :
   (a) $\displaystyle\int_1^3 x^2(3 - x^4)dx$;
   (b) $\displaystyle\int_{-1}^2 x^2(x^3 - 1)^4 dx$;
   (c) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(2t)dt$;
   (d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$;
   (e) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$, *Indice : Quelle est la dérivée de* arctan *?*
   (f) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$;
   (g) $\displaystyle\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3}$;
   (h) $\displaystyle\int_2^5 2^x dx$;

3. Représenter graphiquement chacune des régions fermées suivantes et calculer leur aire :
   (a) $0 \leq y \leq e^x$ et $0 \leq x \leq 1$;
   (b) La région bornée circonscrite par les courbes $y = x^2$ et $y = 18 - x^2$.

4. Calculer le volume de la région

$$\mathcal{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^2 + y^2)^2 \leq z \leq 16\}.$$

5. On **définit** la fonction $\ln :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ par $\ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}$.

(a) Montrer que ln est différentiable et que sa dérivée est $\frac{1}{x}$.

(b) Montrer que c'est une fonction strictement croissante. En déduire que c'est une fonction injective, c'est-à-dire que $\ln x = \ln y \implies x = y$.

(c) On montre dans le numéro 4 du deuxième devoir que $\ln(xy) = \ln x + \ln y \quad \forall x, y > 0$. Utiliser ce fait pour montrer que de $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.

(d) Conclure que l'image de la fonction ln est $\mathbb{R}$.

(e) Soit $\exp : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ l'inverse de la fonction ln. Montrer que exp est différentiable et que sa dérivée est aussi exp.

(f) Montrer que $\exp(0) = 1$ et que $\exp(a + b) = \exp(a)\exp(b) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$.