

Séance de travaux pratiques VI

Le samedi 9 mars 2024

1. Parmi les intégrales suivantes, déterminer celles qui sont impropres et exprimer celles-ci en termes de limites le cas échéant.

(a) $\int_3^5 \frac{dx}{x-3}$;

(b) $\int_4^5 \frac{dx}{x-3}$;

(c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan \theta d\theta$;

(d) $\int_0^1 \arctan u du$;

(e) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

2. Déterminer les valeurs de $p > 0$ pour lesquelles les intégrales suivantes sont convergentes et pour lesquelles elles sont divergentes.

(a) $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$;

(b) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$;

(c) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$;

(d) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$;

3. Calculer, si possible, les intégrales suivantes et déterminer si elles sont convergentes ou divergentes :

(a) $\int_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$;

(b) $\int_0^{+\infty} \sin \theta d\theta$;

(c) $\int_0^4 \frac{2x-4}{x^2-4x} dx$;

4. On considère les fonctions $\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Établir les identités suivantes pour $x \in \mathbb{R}$:

(a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$;

(b) $\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$;

(c) $\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x;$

5. La hauteur H d'un câble électrique suspendu entre deux pylônes esthétiques à Verdun est donnée par

$$H(x) = 1000 \cosh\left(\frac{x}{1000}\right) - 980.$$

Calculer la longueur de ce câble entre $x = -100$ et $x = 100$. *Indice : le numéro 4 sera utile.*