Séance de travaux pratiques VIII

Le samedi 23 mars 2024

1. Calculer l'intégrale indéfinie $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}$.

2. Résoudre les équations différentielles suivantes :
   (a) $\dfrac{dy}{dx} = 4x^2 + 3x + 2\,;$
   (b) $\dfrac{dy}{dx} = x \sin x\,;$
   (c) $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{x} \ln x$ pour $x > 0\,;$
   (d) $\dfrac{dy}{dx} = \tan x \sec^2 x$ pour $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\,;$
   (e) $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{1-x^2}$ pour $x \in (-1, 1)\,;$
   (f) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{x^2 - 2x - 3}$.

3. L'équation différentielle satisfaite par la vitesse $v(t)$, où t est le temps, d'une goutte d'eau en chute libre est donnée
$$\frac{dv}{dt} = g - kv \tag{1}$$
lorsque la résistance de l'air est proportionnelle à la vitesse.
   (a) Résoudre cette équation en utilisant la méthode des facteurs intégrants.
   (b) Montrer que peu importe la vitesse initiale, la vitesse de la goutte d'eau tend invariablement vers $\frac{g}{k}$ à mesure que le temps s'écoule.

4. L'équation différentielle
$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n$$
est appelée équation de Bernoulli. Pour $n = 1$, c'est une équation linéaire.
   (a) Pour $n \neq 1$, montrer que le changement de variable $u = y^{1-n}$ ramène l'équation de Bernoulli à une équation linéaire.
   (b) Résoudre l'équation $\dfrac{dy}{dx} + y = e^{-x}y^2$.

5. Dans un petit village comptant 100 habitants, il y a $P(t)$ habitants ayant la grippe au temps t mesuré en jours. Supposons que le taux d'augmentation de $P(t)$ soit donné par l'équation différentielle

$$\frac{dP}{dt} = \frac{kP(100 - P)}{100}$$

où k est une certaine constante.

   (a) Est-ce que la constante k devrait être positive ou négative ?

   (b) Déterminer $P(t)$ si au temps $t = 0$, il n'y a qu'une seule personne infectée.

   (c) Lorsque t devient grand, est-ce que $P(t)$ s'approche d'une certaine valeur ? Si oui, quelle est cette valeur ?