# Devoir I

## Dû le jeudi 5 février 2015 en classe

**Instructions :** Il y a dix problèmes. Chaque problème vaut dix points pour un total de cent points. Pour chacun des problèmes, présenter une solution détaillée et soignée qui soit lisible et compréhensible pour une personne ne connaissant pas a priori la solution. Chaque réponse doit être pleinement justifiée. Il est possible de travailler en équipe avec d'autres étudiants, mais ultimement, il est important que chacun écrive sa propre solution. Seulement les devoirs écrits à la main seront acceptés.

1. Montrer que le nombre d'or, à savoir $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, est irrationnel.
2. Considérons le sous-ensemble des réels
$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + (b \cdot \sqrt{2}) \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$$
   (a) Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, on a que $x \cdot y \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
   (b) Montrer de plus que tout $x \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \setminus \{0\}$, on a que $x^{-1} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
   (c) Conclure que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ satisfait aux Propriétés 1 à 6 satisfaites par les nombres réels.
3. Trouver les nombres réels $x$ qui vérifient la relation $|x^2 + 5x| < 2x$.
4. Obtenir, s'ils existent, le supremum et l'infimum de l'ensemble $A = \{\dfrac{n-1}{2n+2} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
5. Soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles non vides et bornés supérieurement de $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble $E = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$ est tel que $\sup E \leq \sup A + \sup B$.
6. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'égalité $\dfrac{n+2}{2n+2} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right)$.
7. Soit $\{x_n\}$ la suite définie par $x_n = \dfrac{n(3n+2)}{2n^2+3}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Trouver $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ en justifiant pleinement votre réponse.
8. Soit $\{x_n\}$ une suite de nombres réels telle que $x_n \to a$. Si $x_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $a \leq 1$.
9. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n + (-1)^n}{2^{n+1} + (-1)^{n+1}}$ en justifiant pleinement votre réponse.
10. Soit $\{a_n\}$ une suite définie récursivement par $a_1 = \sqrt{2}$ et $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$ pour $n \geq 2$.
   (a) Montrer que $\sqrt{2} < a_n < 2$ pour tout $n \geq 2$.
   (b) Montrer que la suite est monotone.
   (c) Montrer que la suite converge et obtenir sa limite.