Devoir II

Dû le mardi 7 avril 2015 en classe

Instructions : Il y a dix problèmes. Chaque problème vaut dix points pour un total de cent points. Pour chacun des problèmes, présenter une solution détaillée et soignée qui soit lisible et compréhensible pour une personne ne connaissant pas a priori la solution. Chaque réponse doit être pleinement justifiée. Il est possible de travailler en équipe avec d'autres étudiants, mais ultimement, il est important que chacun écrive sa propre solution. Seulement les devoirs écrits à la main seront acceptés.

1. Soit $\{a_n\}$ une suite telle que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
2. Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série convergente. Montrer que pour tout $r \in (-1, 1]$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$ converge. Est-ce que le résultat reste valable pour $r = -1$?
3. Déterminer si la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}}$ converge. Converge-t-elle absolument ?
4. Si la série $\sum a_n$ converge, est-ce que la série $\sum a_n^2$ converge ?
5. Soit $\{a_n\}$ une suite de termes strictement positifs. Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ diverge aussi.
6. Trouver les valeurs de $r \geq 0$ pour lesquelles la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+r^n}$ converge.
7. Soit $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Pour $\epsilon > 0$ quelconque, trouver $\delta > 0$ dépendant de ϵ tel que $|f(x) - \frac{1}{4}| < \epsilon$ dès que $|x - 2| < \delta$.
8. Calculer la limite $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$.
9. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \\ 1-2x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$
est continue seulement en $x = 0$.
10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que si $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.