Examen de mi-session

Le jeudi 26 février 2015, 9h-12h au PK-1620 et au PK-R250

Instructions : Il y a 5 problèmes. Chaque problème vaut 20 points pour un total de cent points. Pour chacun des problèmes, présenter une solution détaillée et soignée qui soit lisible et compréhensible pour une personne ne connaissant pas a priori la solution. Chaque réponse doit être pleinement justifiée. Aucune documentation n'est permise, sauf un aide-mémoire écrit à la main sur une feuille $8\frac{1}{2} \times 11$ recto-verso. Aucune calculatrice et aucun téléphone cellulaire ne sont autorisés.

1. Obtenir le supremum et l'infimum de l'ensemble

$$\{\frac{n}{n+(-1)^n(n+1)} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

s'ils existent. Justifier rigoureusement votre réponse.

2. Soit $\{x_n\}$ la suite définie par $x_1 = 0$ et $x_n = \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j^2-1}$ pour $n \geq 2$.

   (a) Montrer que $x_n = \frac{(3n+2)(n-1)}{4n(n+1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Trouver la limite de la suite $\{x_n\}$.

3. Obtenir la limite $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2-1}$ en justifiant les étapes.

4. Soit $\{x_n\}$ une suite de nombres réels telle que $x_n \to a$ et soit $\{y_n\}$ la suite définie par $y_n = (-1)^{3n+1}x_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Si $a \neq 0$, trouver deux sous-suites de $\{y_n\}$ convergeant vers des valeurs distinctes

   (b) Montrer que la suite $\{y_n\}$ converge si et seulement si $a = 0$.

5. Déterminer si les séries suivantes convergent :

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{n^2+3}$;

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n)}$.