Solutions au Quiz #1

#1 D'abord : $x \leq y \leq x + \frac{z}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \leq y - x \leq \frac{z}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ en soustrayant x à chaque terme

$\Rightarrow 0 \leq n(y-x) \leq z$ $\forall n \in \mathbb{N}$ en multipliant par $n \in \mathbb{N}$.

Donc $y - x \geq 0$ et on veut montrer que $x = y$. Supposons pour une contradiction que ce ne soit pas le cas. Alors,

$x \neq y$ et $y - x \geq 0 \Rightarrow y - x > 0$

$\Rightarrow$ par la propriété archimédienne des réels, $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $n(y-x) > z$

$\Rightarrow$ on a une contradiction avec le fait que $n(y-x) \leq z$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Pour éviter une contradiction, il faut donc admettre que $y = x$.

#2 Remarquons que : $q \in E \Leftrightarrow q \in \mathbb{Q}$ et $|q-1| < 2$

$\Leftrightarrow q \in \mathbb{Q}$ et $-2 < q - 1 < 2$, car $|x| < b \Leftrightarrow -b < x < b$

$\Leftrightarrow q \in \mathbb{Q}$ et $-1 < q < 3$, en ajoutant 1 à tous les termes.

Autrement dit, $E = \{q \in \mathbb{Q} \mid -1 < q < 3\}$. Par la densité des nombres rationnels, E n'est pas vide. Clairement -1 est une borne inférieure et 3 est une borne supérieure. On va montrer que $\inf E = -1$ et $\sup E = 3$:

1) $\inf E = -1$: Si $b > -1$, alors il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $-1 < q < \min\{3, b\} \leq 3$ par densité des nombres rationnels, donc $q \in E$ et $-1 < q < b$, ce qui montre que b n'est pas une borne inférieure de E. Comme $b > -1$ est quelconque, cela montre que -1 est bien la plus grande borne inférieure de E, donc $\inf E = -1$.

2) $\sup E = 3$: Si $b < 3$, alors il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $-1 \leq \max\{-1, b\} < q < 3$ par densité des nombres rationnels. En particulier, $q \in E$ et $b < q$, donc b n'est pas une borne supérieure de E. Comme $b < 3$ était quelconque, on voit donc que 3 est la plus petite borne supérieure de E, donc $\sup E = 3$.