Séance de travaux pratiques I

Le jeudi 15 janvier 2015

1. En utilisant les propriétés 1 à 6 des nombres réels, montrer que si $0 \leq a < b$ et $0 \leq c < d$, alors $ac < bd$.
2. Soit E l'ensemble constitué des sommets, des arêtes et des faces d'un cube. Montrer que la relation d'inclusion définit une relation d'ordre sur E. Est-ce que E muni de cette relation d'ordre est totalement ordonné ?
3. Obtenir, s'ils existent, le supremum et l'infimum des ensembles suivants :

$$A = \left\{ \frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{et} \quad B = \left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

4. Soient A et B deux sous-ensembles non vides et bornés inférieurement de $\mathbb{R}$.
   (a) Si $A \cap B \neq \emptyset$, montrer que $\inf(A \cap B)$ existe et que $\inf(A \cap B) \geq \max\{\inf A, \inf B\}$.
   (b) Trouver deux ensembles A et B tels que $A \cap B \neq \emptyset$ et $\inf(A \cap B) > \max\{\inf A, \inf B\}$.
5. Soient A et B des sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$ tels que $\forall\ x \in A$ et $\forall\ y \in B$, on a que $x \leq y$.
   (a) Montrer que $\sup A$ existe et que $\sup A \leq y\ \forall\ y \in B$.
   (b) Montrer que $\inf B$ existe et que $\sup A \leq \inf B$.
6. Montrer que $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre rationnel.
7. Trouver les nombres réels satisfaisant aux relations suivantes :
   (a) $|x - 2| > 3$,
   (b) $|x| + |x - 1| > 1$.

Exercices supplémentaires : 1, 2abch dans [1, §1.2.1].

Références

[1] J. Labelle et A. Mercier. *Introduction à l'analyse réelle.* Modulo, 1993.