Séance de travaux pratiques X

Le jeudi 9 avril 2015

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\lim_{h\to 0}(f(x+h) - f(x-h)) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Est-ce que la fonction f est nécessairement continue ?
2. Montrer de façon géométrique que $|\sin\theta| \leq |\theta|$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. En déduire que les fonctions sinus et cosinus sont continues en $\theta_0 = 0$.
3. En utilisant le numéro précédent et les identités trigonométriques $\sin(\theta+\phi) = \cos\theta\sin\phi + \cos\phi\sin\theta$ et $\cos(\theta+\phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi$, montrer que les fonctions cosinus et sinus sont continues sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que la fonction $f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est discontinue en $x_0 = 0$.
5. Montrer que la fonction $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ n'est continue qu'en $x_0 = 0$.
6. Montrer que la fonction $f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est continue en $x_0 = 0$.
7. Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ des fonctions.
   (a) Montrer que $\max\{f,g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f-g|)$ et que $\min\{f,g\} = \frac{1}{2}(f + g - |f-g|)$.
   (b) Si f et g sont continues en $x_0 \in D$, montrer que $\max\{f,g\}$ et $\min\{f,g\}$ sont aussi continues en x_0.
8. Montrer que le polynôme $P(x) = x^5 + 2x^3 + x - 3$ possède une racine réelle.
9. Montrer qu'il existe $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ tel que $x = \cos x$.

Exercices supplémentaires dans [1] :

§4.5.1 : 4,5,
§4.6.1 : 1,2,4
§4.7.1 : 4

Références

[1] J. Labelle et A. Mercier. *Introduction à l'analyse réelle*. Modulo, 1993.