Séance de travaux pratiques XI

Le jeudi 16 avril 2015

1. Montrer que la fonction $f(x) = \sin x$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
3. Monter que la fonction $\cos(\frac{1}{x})$ n'est pas uniformément continue sur l'intervalle $(0, 1)$.
4. Montrer que la fonction $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \tan x$ est bijective. Montrer de plus que sa réciproque $\arctan x := f^{-1}(x)$ est continue.
5. Montrer par un argument géométrique que $|\theta| \leq |\tan\theta|$ pour $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. En utilisant le théorème des gendarmes et le numéro 2 du TP10, en conclure que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
6. À l'aide des identités trigonométriques $\sin(\theta + \phi) = \cos\theta \sin\phi + \cos\phi \sin\theta$ et $\cos(\theta + \phi) = \cos\theta \cos\phi - \sin\theta \sin\phi$, montrer que les fonctions $\sin x$ et $\cos x$ sont différentiables.
7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}$ et trouver f'.
8. Donner une formule pour la n-ième dérivée de la fonction $f(x) = x \sin x$.

Exercices supplémentaires dans [1] :

§4.8.1 : 3,
§4.9.1 : 1
§5.2.1 : 6,9
§5.3.1 : 4,5

Références

[1] J. Labelle et A. Mercier. *Introduction à l'analyse réelle.* Modulo, 1993.