Séance de travaux pratiques XII

Le jeudi 23 avril 2015

1. Montrer que la fonction arctan : $\mathbb{R} \to (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$ est différentiable et calculer sa dérivée.
2. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Si $f'(a) < 0 < f'(b)$ ou si $f'(a) > 0 > f'(b)$, montrer qu'il existe $x \in (a, b)$ tel que $f'(x) = 0$. Indice : Est-ce que f possède un extremum dans (a, b) ?
3. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et différentiable sur (a, b). Si $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in (a, b)$, montrer que soit f' prend seulement des valeurs strictement positives dans (a, b), soit elle prend seulement des valeurs strictement négatives dans (a, b). En conclure que f est strictement monotone.
4. Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues sur $[a, b]$ et différentiables sur (a, b). Si $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in (a, b)$, montrer qu'il existe $c \in (a, b)$ tel que
$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(c) - f(a)}{g(b) - g(c)}.$$
5. Montrer que l'équation $\cos x = x^2$ possède exactement deux solutions.
6. Soit $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Si f' est une fonction croissante et $f(0) = 0$, montrer que la fonction $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ est strictement croissante.
7. Obtenir la loi de Snell-Descartes pour la réfraction à partir du principe de Fermat : la lumière emprunte le chemin le plus rapide (qui n'est pas nécessairement le plus court).
8. Calculer les limites suivantes :
   (a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan x}$;
   (b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2}$.

Exercices supplémentaires dans [1] :
§5.4.1 : 2,4
§5.5.1 : 1

Références

[1] J. Labelle et A. Mercier. *Introduction à l'analyse réelle.* Modulo, 1993.