Séance de travaux pratiques III

Le jeudi 29 janvier 2015

1. Retour sur le quiz de la semaine dernière :
   (a) Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ des nombres tels que $x \leq y \leq x + \dfrac{z}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $x = y$.
   (b) Déterminer, s'ils existent, le supremum et l'infimum de l'ensemble
   $$E = \{q \in \mathbb{Q} \mid \ |q-1| < 2\}.$$
2. Trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que $n > N$ entraîne que $\left|\dfrac{2n}{2n+3} - 1\right| < \dfrac{1}{327}$.
3. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$.
4. Trouver $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n}\right)$.
5. Soit $P(x) = a_r x^r + a_{r-1}x^{r-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ et $Q(x) = b_s x^s + b_{s-1}x^{s-1} + \ldots + b_1 x^1 + b_0$ deux polynômes tels que $a_r \neq 0$ et $b_s \neq 0$. Montrer que
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} \frac{a_r}{b_s}, & \text{si } r = s, \\ 0, & \text{si } s > r, \\ \infty, & \text{si } r > s. \end{cases}$$
6. Soit $\{x_n\}$ la suite définie par $x_1 = 1$ et $x_{n+1} = \dfrac{n}{x_n + n}$.
   (a) Montrer que $0 \leq x_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.
7. Soit $\{x_n\}$ la suite définie par $x_1 = 1$ et $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{x_n + 1}$.
   (a) Montrer que $0 \leq x_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que la suite $\{x_n\}$ est décroissante.
   (b) Trouver $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Exercices supplémentaires dans [1] :
§3.2.1 : 4c, 6abc ;
§3.3.1 : 1ab, 2bcel, 5.

Références

[1] J. Labelle et A. Mercier. *Introduction à l'analyse réelle*. Modulo, 1993.