Séance de travaux pratiques IV

Le jeudi 5 février 2015

1. Soit $m \in \mathbb{N}$. Si $\{x_n\}$ est une suite telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, montrer que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[m]{x_n} = \sqrt[m]{\lim_{n\to\infty} x_n} = \sqrt[m]{x}$, où on suppose que $x_n \geq 0$ pour tout n si l'entier m est pair.
2. Pour tout nombre réel a, montrer que $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.
3. Soit $a > 1$ un nombre réel. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n} = +\infty$ et que $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+\sqrt{n}} = 1$.
5. Déterminer si les suites ci-dessous, définies par récurrence, convergent ou divergent. Lorsqu'elles convergent, trouver leur limite.
   (a) $x_1 = 1$ et $x_{n+1} = 3 + \sqrt{x_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) $x_1 = 1$ et $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1+3x_n}{1+7x_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) $x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \sqrt{2}$ et $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n - x_{n-1}}$ pour $n \geq 2$.
6. Soit $\{x_n\}$ la suite définie par $x_1 = 2$ et $x_{n+1} = 2x_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que si $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ existe, alors $x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$.
   (b) Est-ce que cette limite existe ?
7. Soit $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ deux suites de nombres réels définies par
$$x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \quad \text{et} \quad y_n = x_n + \frac{1}{2n+1}.$$
   (a) Montrer que $\{x_n\}$ est une suite croissante et que $\{y_n\}$ est une suite décroissante.
   (b) Monter que $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$.
8. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite de la suite $\{x_n\}$ définie par
$$x_n = \prod_{i=0}^{n} (1 + x^{2^i}) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n}).$$