Séance de travaux pratiques V

Le jeudi 12 février 2015

1. Déterminer si les suites ci-dessous, définies par récurrence, convergent ou divergent. Lorsqu'elles convergent, trouver leur limite.
   (a) $x_1 = 1$ et $x_{n+1} = 3 + \sqrt{x_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) $x_1 = 1$ et $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1+3x_n}{1+7x_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) $x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \sqrt{2}$ et $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n - x_{n-1}}$ pour $n \geq 2$.
2. Soit $\{x_n\}$ la suite définie par $x_1 = 2$ et $x_{n+1} = 2x_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ existe, alors $x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$.
   (b) Est-ce que cette limite existe ?
3. Soit $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ deux suites de nombres réels définies par
$$x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \quad \text{et} \quad y_n = x_n + \frac{1}{2n+1}.$$
   (a) Montrer que $\{x_n\}$ est une suite croissante et que $\{y_n\}$ est une suite décroissante.
   (b) Monter que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite de la suite $\{x_n\}$ définie par
$$x_n = \prod_{i=0}^{n} (1 + x^{2^i}) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n}).$$
5. Trouver la limite de la suite $\{x_n\}$ définie récursivement par $x_1 = a$, $x_2 = b$ et $x_{n+2} = \dfrac{x_{n+1} + x_n}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^n$.
7. Déterminer si la suite $\{\cos(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{n\pi}{2})\}$ converge.
8. Trouver la limite de la suite $\{x_n\}$ donnée par $x_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n}\right)$.

Exercices supplémentaires dans [1] :
§1.3.1 : 1, 3, 6 (exercices sur la valeur absolue)

Références

[1] J. Labelle et A. Mercier. *Introduction à l'analyse réelle.* Modulo, 1993.