Séance de travaux pratiques VI

Le jeudi 19 février 2015

1. Trouver la limite de la suite $\{x_n\}$ donnée par $x_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n}\right)$.
2. En utilisant le fait, prouvé par Hermite en 1873 (voir [2] pour une démonstration), que e est un nombre transcendant, montrer que $\ln(r)$ est irrationnel pour tout $r \in \mathbb{Q}$ tel que $r > 1$.
3. Donner un exemple de suites bornées $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ telles que
   (a) $\lim_{n\to\infty} \sup(x_n \cdot y_n) \neq \lim_{n\to\infty} \sup x_n \cdot \lim_{n\to\infty} \sup y_n$;
   (b) $\lim_{n\to\infty} \inf(x_n + y_n) \neq \lim_{n\to\infty} \inf x_n + \lim_{n\to\infty} \inf y_n$.
4. Déterminer la limite supérieure et la limite inférieure de la suite $\{\frac{1}{n} + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\}$.
5. Soit $a > 0$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)(n+1+a)} = \frac{1}{a}$.
6. Si la série $\sum a_n$ converge, montrer que la série $\displaystyle\sum \frac{1}{a_n^2+1}$ diverge.
7. Soit $\{a_n\}$ la suite définie récursivement par $a_1 = 1$ et $a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1+a_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer par induction que $a_n > 0$, $a_{2n-1}^2 < 2$ et $a_{2n}^2 > 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que les sous-suites $\{a_{2n}\}$ et $\{a_{2n-1}\}$ convergent.
   (c) Montrer que $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$, ce qui donne le développement en fraction continue de $\sqrt{2}$, à savoir
   $$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2+\cdots}}.$$

Exercices supplémentaires dans [1] :
§3.6.1 : 2abd
§7.2.1 : 5, 7, 8b

Références

[1] J. Labelle et A. Mercier. *Introduction à l'analyse réelle.* Modulo, 1993.

[2] Michael Spivak. *Calculus.* Publish or Perish, Inc., 1994.