Séance de travaux pratiques IX

Le jeudi 26 mars 2015

1. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Si x_0 est un point d'accumulation de A, montrer que pour tout $\delta > 0$, l'ensemble $V'(x_0, \delta) \cap A$ possède une infinité d'éléments.
2. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Si x_0 n'est pas un point d'accumulation de A, montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $V'(x_0, \delta) \cap A = \emptyset$.
3. Montrer que tout nombre réel est un point d'accumulation de l'ensemble $\mathbb{Q}$.
4. Déterminer quels sont les points d'accumulation de l'intervalle $[0, 1)$.
5. Trouver $\delta > 0$ tel que $\left|\dfrac{3x-1}{x+2} - \dfrac{2}{3}\right| < \dfrac{1}{1000}$ dès que $0 < |x - 1| < \delta$.
6. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction à variable réelle et soit x_0 un point d'accumulation de D. Établir l'équivalence suivante :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \iff \lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = L.$$

7. Évaluer les limites suivantes :
   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{x}$
   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x-1}}$
   (c) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = na^{n-1}$

Exercices supplémentaires dans [1] :
§4.3.1 : 2abc, 4bc,
§4.4.1 : 1, 3bce, 7ab

Références

[1] J. Labelle et A. Mercier. *Introduction à l'analyse réelle.* Modulo, 1993.